Probabilidad 1
Segundo de Matemáticas
Curso 2002-2003

Hoja 5

Decimos que una sucesión de variables $\{X_n\}$ converge, cuando $n \to \infty$, a X

- en **media cuadrática** si $\mathbf{E}(|X_n - X|^2) \to 0$ cuando $n \to \infty$;
- en **probabilidad** si, para todo $\varepsilon > 0$, $\mathbf{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \to 0$ cuando $n \to \infty$;
- en **distribución** si, para todo t, $\mathbf{P}(X_n \le t) \to \mathbf{P}(X \le t)$ cuando $n \to \infty$.

1. Sea Z_n una variable aleatoria discreta con función de masa dada por:

$$\mathbf{P}(Z_n = n^\alpha) = \frac{1}{n}, \qquad \mathbf{P}(Z_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}\,.$$

Comprobar que Z_n converge en media cuadrática (L^2) a 0 si y sólo si $\alpha < 1/2$. ¿Para qué valores de α converge en probabilidad o en distribución?

2. Supongamos que la sucesión de variables aleatorias Z_n converge a la variable aleatoria Z en media cuadrática (o en probabilidad, o en distribución). Sean a y b números reales. Comprobar que la sucesión $aZ_n + b$ converge en media cuadrática (respectivamente, en probabilidad y en distribución) a $aZ + b$.

3. Sea $X_1, X_2, \ldots$ una sucesión de variables aleatorias independientes, todas con distribución uniforme en el intervalo $(0, a)$, y sea $Z_n = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$. Demuéstrese que

a) $Z_n \longrightarrow a$ en probabilidad, cuando $n \to \infty$,

b) $\sqrt{Z_n} \longrightarrow \sqrt{a}$ en probabilidad, cuando $n \to \infty$,

c) Si $U_n = n\,(1 - Z_n)$ y $a = 1$, entonces $\mathbf{P}\,(U_n \le x) \longrightarrow \begin{cases} 1 - e^{-x}, & \text{si } x > 0\,, \\ 0, & \text{si } x \le 0\,; \end{cases}$

de manera que U_n converge en distribución a una exponencial con parámetro 1.

4. Para cada n, sea X_n una binomial de parámetros n y p, con p fijo. Demuéstrese que X_n/n converge a p en probabilidad cuando $n \to \infty$.

5. Compruébese que si $X_n \to X$ e $Y_n \to Y$ en probabilidad, entonces $X_n + Y_n \to X + Y$ en probabilidad.

6. Dar un ejemplo de una sucesión de variables X_n tales que $X_n \to X$ en probabilidad, pero donde $\mathbf{E}(X_n)$ no converge a $\mathbf{E}(X)$.

7. Adáptese la demostración de la desigualdad de Chebychev para comprobar que si X es una variable aleatoria y $a > 0$ entonces:

$$\mathbf{P}\,(|X| \ge a) \le \frac{\mathbf{E}\,(g(X))}{g(a)}$$

para cualquier función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que cumple (i) $g(x) = g(-x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$; (ii) $g(0) \ge 0$ y (iii) g es estrictamente creciente en $[0, \infty)$.

8. Sea X una variable que sólo toma valores en el intervalo $[-M, M]$. Compruébese que

$$\mathbf{P}(|X| \ge a) \ge \frac{\mathbf{E}(|X|) - a}{M - a} \quad \text{para cualquier } a, \text{ tal que } 0 \le a < M.$$

9. Demuéstrese que X_n tiende a 0 en probabilidad si y sólo si $\mathbf{E}\left(\dfrac{|X_n|}{1+|X_n|}\right) \longrightarrow 0$ cuando $n \to \infty$.

10. Sea X_n una sucesión de variables aleatorias que converge en media cuadrática. Demuéstrese que $\mathbf{E}((X_n - X_m)^2) \to 0$ cuando $n, m \to \infty$.

Si, además, todas las X_n tienen la misma media μ y la misma desviación típica σ, demuéstrese que el coeficiente de correlación $\rho(X_n, X_m)$ entre X_n y X_m cumple que $\rho(X_n, X_m) \to 1$ cuando $n, m \to \infty$.

11. Supongamos que $X_1, X_2, \ldots$ es una sucesión de variables aleatorias independientes (no suponemos que tienen la misma distribución). Llamemos $m_k = \mathbf{E}(X_k)$ y $\sigma_k^2 = \mathbf{V}(X_k)$. Supongamos que hay una constante R tal que $\sigma_k^2 < R$ y denotemos por

$$M_n = \frac{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}{n}\,.$$

Demuéstrese que, para cualquier ε, $\mathbf{P}\left(\left|\left(\dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}\right) - M_n\right| < \varepsilon\right) \longrightarrow 1$ cuando $n \to \infty$.

12. La posible nota de un alumno en el examen de una asignatura es una variable aleatoria con valores entre 0 y 100, de media 70 y de varianza 25.

a) Hállese una cota inferior para la probabilidad de que la nota del alumno quede entre 65 y 75.

b) Si la clase tiene 100 alumnos análogos, hállese una cota inferior para la probabilidad de que la nota media de la clase quede entre 65 y 75.

13. Aplicando el teorema del límite central a una sucesión de variables de Poisson, pruébese que

$$e^{-n}\Big(\sum_{j=0}^{n} \frac{n^j}{j!}\Big) \longrightarrow \frac{1}{2}, \qquad \text{cuando } n \to \infty\,.$$

14. Sea Z una variable normal estándar. Calcúlense $\mathbf{E}(Z^2)$ y $\mathbf{E}(Z^4)$. Sea $Y = Z^2$. Hállese la función de densidad de Y, su media y su varianza.

Sea ahora $Z_1, Z_2, \ldots$ una sucesión de variables aleatorias normales estándar independientes. Para cada natural n, definamos la variable S_n:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} Z_i^2$$

- Úsese el teorema del límite central para comprobar que $\mathbf{P}\left(S_n \leq n + k\sqrt{(2n)}\right)$ converge a un cierto límite, para cada k fijo, cuando $n \to \infty$.
- Demostrar que, para todo c fijo, $\mathbf{P}\left(S_n \leq c\right)$ tiende a 0 cuando $n \to \infty$.

15. Sea S el número de caras que se obtienen al lanzar una moneda regular un millón de veces. Úsense la desigualdad de Chebychev y el Teorema del Límite Central para estimar:

- la probabilidad de que S quede entre 499.500 y 500.500,
- la probabilidad de que S quede entre 498.000 y 502.000.

16. En una encuesta se supone que una proporción p (desconocida) de gente en una población están a favor de una determinada nueva ley y que, consecuentemente, una proporción $1-p$ están en contra. Se toma una muestra (elegidos independientemente unos de otros) de tamaño n. Úsese el teorema del límite central para determinar qué tamaño n debe tener la muestra para que la estimación (a partir de la muestra) de la proporción p tenga, con probabilidad de un 95%, un error de a lo sumo 0,01.