1. Sean $X_1, ..., X_n$ observaciones independientes y en las mismas condiciones experimentales de una cantidad aleatoria X con media μ y varianza σ^2.
a) Calcular la esperanza y la varianza de la media muestral de las n observaciones.
b) Calcular la esperanza de la varianza muestral de las n observaciones. Obtener una función de $X_1, ..., X_n$ cuya esperanza sea σ^2 (es lo que se llama un estimador insesgado de σ^2).

2. Una placa de densidad uniforme es bombardeada por n partículas. Cada partícula que penetra en la placa recorre una distancia X antes de colisionar. Dicha distancia es una variable aleatoria para la que supondremos una distribución exponencial de parámetro λ.
a) Describir el esquema estadístico y calcular la distribución de las v. a. U = Distancia máxima recorrida, V = Distancia mínima recorrida y $\bar{X}$ = Distancia media recorrida por las n partículas.
b) Si la placa tiene una anchura a, estudiar la v.a. N = Número de partículas que la atraviesan. Estimar el valor de λ si para n= 1000 y a=10 la placa ha sido atravesada por 100 partículas. Utilizar este resultado para estimar la media de las tres variables del apartado anterior.

3. Para llegar a una medida del "pie", en el siglo XVI en Alemania, se realizó la siguiente operación: En un domingo se alinearon los 60 primeros hombres que llegaron a la iglesia y se midió la longitud del pie izquierdo de cada uno; la longitud media se denominó "pie legal".
a) Describir el esquema estadístico, estableciendo el modelo adecuado.
b) Si la longitud media del pie izquierdo de los hombres adultos en Alemania era μ y la desviación típica 12 mm., calcular la probabilidad de que dos "pies legales", definidos respecto a dos grupos distintos de 60 hombres, difieran en más de 5 mm.
c) Calcular cuantos hombres deberían tomarse para que, con probabilidad 0,99, la dimensión media de sus pies difiera de μ en menos de 0,5 mm.
d) Intervalo de confianza 0,95 para μ.
Para n= 100 hombres que elegiremos al azar, calcular la cantidad ϵ tal que, con probabilidad 0,95, el verdadero valor de μ se encuentre dentro del intervalo $(\bar{X} - \epsilon, \bar{X} + \epsilon)$.
e) Comentar qué pasaría con todo lo anterior si la desviación típica fuese desconocida.

4. Contraste de Hipótesis.
Supongamos que nos ofrecen una moneda para decidir algo a cara o cruz. Como dudamos de que la moneda sea correcta, pedimos hacer una prueba previa lanzando 10 veces la moneda.
a) Establecer los valores del número de caras obtenido en los 10 lanzamientos que, intuitivamente, os harían rechazar la moneda.
b) Con lo establecido en el apartado anterior, calcular la probabilidad de rechazar una moneda correcta y la de aceptar una moneda cargada con probabilidad de cara 1/3.
c) Realizar el experimento y describir todos los elementos del esquema estadístico correspondiente.

5. En el sorteo de la Lotería de Navidad 2006, el primer premio ha correspondido al mismo número (20297) en el que recayó ese premio en el mismo sorteo de 1903.
Formular el modelo de probabilidad a aplicar, especificar claramente cuál es el "suceso improbable" que ha ocurrido, y calcular su probabilidad.
Datos: ha habido sorteos de Navidad desde 1892; para simplificar, suponer que el bombo contiene 60.000 números, como fue el caso durante mucho tiempo.

6. Estimación de una superficie por el método de Montecarlo:
Se elige al azar (con distribución uniforme) un punto en el cuadrado unidad. Sea A un subconjunto del cuadrado unidad con área $a \in (0,1)$.
Supongamos que elegimos independientemente y con el mismo procedimiento n puntos en el cuadrado unidad.
a) Indicar la probabilidad de que el punto caiga en A. y la distribución de la v.a. $N =$ número de puntos entre los n que caen en A.
b) Describir cómo, para n suficientemente grande y mediante la Ley de los Grandes Números, a puede aproximarse tanto como queramos.
Indicación: considerar una sucesión de v.a. i.i.d de Bernoulli con exito = el punto cae en A.
c) Calcular, aproximadamente, la probabilidad de que el error que se cometa en la estimación de a sea mayor que $a/100$ si $a = 1/2$ y $n = 10000$.

7. La publicidad de un cierto tipo de baterías dice que tienen una duración media de funcionamiento de 120 horas, con una desviación típica de 10 horas. Una organización de defensa del consumidor pone a funcionar 400 de estas baterías y obtiene que la duración media de las 400 fue de 110 horas. Se desconoce la distribución de la v.a. $X =$ Duración de una batería elegida al azar.
Suponiendo que la publicidad es correcta:
a) Aplicando el Teorema Central del Límite, indicar la distribución aproximada de la v.a. $\bar{X} =$ Duración media de 400 baterías elegidas al azar.
b) Calcular aproximadamente la probabilidad de que la duración media de las 400 baterías supere 110 horas.
c) Calcular el número de baterías necesarias para que su duración media difiera de 120 horas en menos de 1 hora, con probabilidad 0'95.