Estadística I
Grado en Matemáticas, UAM, 2018-2019

Hoja 5. Cota de Cramér-Rao. Normalidad asintótica

Cota de Cramér–Rao

Nota: en los ejercicios que siguen, $I_X(\theta)$ denota la *cantidad de información* (esto es, la varianza de la variable de información Y) de la variable X con función de densidad/masa $f(x;\theta)$.

1. Para una variable $X \sim \text{GEO}(p)$, interesa estimar el parámetro $\theta = 1/p$. Recuerda (o comprueba) que $\mathbf{E}_\theta(X) = \theta$ y que $\mathbf{V}_\theta(X) = \theta(\theta-1)$.

a) Comprueba que $I_X(\theta) = \frac{1}{\theta(\theta-1)}$.

b) Deduce que $\overline{X}$ es el estimador insesgado de mínima varianza.

2. La función de masa de la variable X viene dada por

valores	-1	0	1
probabilidades	$\theta/4$	$1-\theta/2$	$\theta/4$

Aquí, el parámetro $\theta \in (0,1)$.

a) Halla la cota de Cramér–Rao para estimadores insesgados de θ y muestras de tamaño n de X.

b) Consideramos el siguiente estimador de θ para muestras de X de tamaño n:

$$T(X_1,\dots,X_n) = 2\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2\right).$$

Comprueba que T es un estimador insesgado de θ. ¿Es T de mínima varianza?

3. Considera la variable X con función de densidad

$$f(x;\theta) = \frac{1}{2\theta}\, e^{-|x|/\theta} \qquad \text{para } x \in \mathbb{R}.$$

Aquí, θ es un parámetro positivo.

a) Escribe la cota de Cramér–Rao para la varianza de cualquier estimador de θ insesgado para muestras $(X_1,\dots,X_n)$ de X de tamaño n.

(Nota: recuérdese que $\int_0^\infty x^k\, e^{-x}dx = \Gamma(k+1) = k!$ si $k \geq 1$).

b) Estudia si el estadístico

$$\overline{|X|} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n |X_i|$$

es un estimador insesgado de θ y si es de mínima varianza.

4. Sea $X \sim \text{GEO}(p)$, con $p \in (0,1)$. Queremos utilizar $1/\overline{X}$ para estimar p. Comprueba que

$$\sqrt{n}\Big(\frac{1}{\overline{X}} - p\Big) \quad \text{converge en distribución a} \quad \mathcal{N}(0, p^2(1-p))$$

5. La función de masa de la variable X viene dada por

valores	0	$\sqrt{\theta}$	$2\sqrt{\theta}$
probabilidades	$\theta/4$	$1-\theta/2$	$\theta/4$

Aquí, el parámetro $\theta \in (0,1)$.

Consideramos el estimador

$$T(X_1, \dots, X_n) = \overline{X}^{\,2}$$

Escribe un resultado de normalidad asintótica para T.

6. La variable X sigue una distribución triangular (simétrica con moda y media en 0) dada, para $\theta > 0$, por

$$f(x;\theta) = \frac{1}{\theta}\Big(1 - \frac{|x|}{\theta}\Big) \qquad \text{si } |x| < \theta.$$

Consideramos el estimador de θ siguiente:

$$M_n = \sqrt{6\overline{X^2_{(n)}}}\,.$$

Comprueba, usando el método delta, que

$$\sqrt{n}\,(M_n - \theta) \quad \text{converge en distribución a} \quad \mathcal{N}\big(0, \tfrac{7}{20}\,\theta^2\big).$$

7. La variable X sigue una cierta distribución que depende de un parámetro $a > 0$. Los valores de sus primeros momentos son

$$\mathbf{E}_a(X) = a^{3/2}, \qquad \mathbf{E}_a(X^2) = 2a^3, \qquad \mathbf{E}_a(X^3) = 5a^{9/2}, \qquad \mathbf{E}_a(X^4) = 15\,a^6.$$

Para muestras de tamaño n de X, consideramos el siguiente estimador del parámetro a:

$$T(X_1, \dots, X_n) = \Big(\frac{\overline{X^2}}{2}\Big)^{1/3}.$$

Escribe un resultado de normalidad asintótica para T usando el método delta.

8. Considera la variable X con función de densidad

$$f(x;\theta) = \frac{1}{2\theta}\, e^{-|x|/\theta} \qquad \text{para } x \in \mathbb{R},$$

donde θ es un parámetro positivo.

Consideramos el estimador de θ para muestras de tamaño n de X siguiente:

$$T(X_1, \dots, X_n) = \Big(\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2\Big)^{1/2}.$$

Usa el método delta para escribir un resultado de normalidad asintótica para T.