

Matemática Discreta
Tercero de Matemáticas
Curso 2001-2002

Hoja 5

1. Probar que, dados dos vértices cualesquiera de en un árbol, existe un único camino que los conecta.
2. Probar que el grafo G con n vértices es un árbol si y sólo si $p_G(k) = k(k-1)^n$.
3. Sean H y G dos grafos con los mismos vértices y de forma que toda arista de H lo sea también de G . Probar que $p_G(k) \leq p_H(k)$, para todo k natural.
4. Deducir de los dos ejercicios anteriores que si G es un grafo conexo con n vértices entonces $p_G(k) \leq k(k-1)^{n-1}$ para cada k natural.
5. Sea G un grafo con n vértices cuyo polinomio cromático P_G cumple que

$$P'_G(0) \neq 0 \quad \text{y} \quad P_G^{(n-1)}(0) = (1-n)(n-1)!.$$

Demostrar que G es un árbol.

6. ¿Existe algún árbol de siete vértices con cinco vértices de grado 1 y dos de grado 2? ¿Y con vértices de grados 1, 1, 1, 2, 2, 3? En caso afirmativo, construirlos.
7. ¿Cuántos árboles distintos se pueden formar con un conjunto de ocho vértices, $\{1, 2, 3, \dots, 8\}$, de manera que 2 de los vértices tengan grado 4 y los 6 restantes tengan grado 1?
8. Si G es árbol con p vértices de grado 1 y q vértices de grado 4, y ningún otro vértice, ¿qué relación hay entre p y q ?
9. Calcular el número de árboles abarcadores distintos que tiene un grafo C_n , un grafo L_n o un grafo K_n .
10. Calcular el número de árboles abarcadores distintos de un grafo isomorfo a un $K_{2,s}$. ¿Y en el caso de un $K_{3,s}$?
11. Consideremos el grafo que se obtiene al tomar n triángulos con exactamente un vértice común. (El número total de vértices es $2n+1$ y el número de aristas es $3n$.) ¿Cuántos árboles abarcadores tiene?
12. Sea H un árbol abarcador de peso mínimo de un grafo ponderado G . Sea f una arista de G que no está en H . Y sea e cualquier arista del camino (único) en H que une los vértices de f . Probar que el peso de e es menor o igual que el peso de f .
13. Sea G el grafo con vértices $\{a, b, 1, 2, \dots, 10\}$ (12 vértices) y aristas $\{\{a, j\}, j = 1, 2, \dots, 10\}$ y $\{\{b, j\}, j = 1, 2, \dots, 10\}$ (20 aristas). Las aristas que tienen a a como extremo pesan 1 y las aristas que tiene a b como extremo pesan 2. ¿Cuál es el peso mínimo de entre los árboles abarcadores de G ?