CÁLCULO 1 Curso 2010-2011

PRIMERO CURSO, GRADO EN MATEMÁTICAS (GRUPO 715)

Hoja 5: Derivadas

1.- Estudia la continuidad y derivabilidad de las siguientes funciones. Calcula la derivada en los puntos que exista.

(a) $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ (b) $f(x) = \arccos x$ (c) $f(x) = \dfrac{x^3}{|x|}$

(d) $f(x) = \ln\left(\dfrac{e^x - 1}{x}\right)$ (e) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ (f) $f(x) = x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$

2.- Halla el valor de los parámetros a, b, c para que las funciones que se definen a continuación sean derivables en todo su dominio:

$$f_1(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \leq 2, \\ a \cdot x + b & \text{si} \quad x > 2. \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} a + b \cdot x^2 & \text{si} \quad |x| \leq 2, \\ \dfrac{1}{|x|} & \text{si} \quad |x| > 2. \end{cases}$$

$$f_3(x) = \begin{cases} a \cdot \cos x & \text{si} \quad x \leq 0, \\ b - x^2 & \text{si} \quad 0 < x < 1, \\ c \cdot \arctan x & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases} \qquad f_4(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(\pi x) + a & \text{si} \quad x \leq 0, \\ a + b \cdot x & \text{si} \quad 0 < x < 2, \\ c \cdot e^{x^2} & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

3.- Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \ln \frac{x-1}{x+1}$ *b)* $f(x) = \operatorname{sen}(\ln x)$ *c)* $f(x) = \ln(x^2 \ln^3 x)$

d) $f(x) = x^{\tan(2\pi x)}$ *e)* $f(x) = \operatorname{arc\,sen} \sqrt{x^2 - 1}$ *f)* $f(x) = x^{\ln x}$

g) $f(x) = \ln_x e^x$ *h)* $f(x) = \tan(x^2 + \ln x + \arctan x)$ *i)* $f(x) = \sec(\operatorname{cosec} x)$

4.- ¿Cuántas derivadas sucesivas existen para la función $f(x) = |x|^3$? Calcúlalas. Haz lo mismo con $g(x) = x\,|x|$.

5.- Sea $f(x) = \operatorname{sen}(2x)$. Calcula $f^{(2010)}(x)$ (derivada de orden 2010).

6.- Prueba que si $f(x)$ es derivable en $x = a$ y $f(a) \neq 0$ entonces $|f(x)|$ es derivable en $x = a$.

7.- (*) a) Sea f una función diferenciable par. Calcula $f'(0)$.

b) Sea f una función diferenciable. Demuestra que si f es par entonces f' es impar. Demuestra que si f es impar entonces f' es par.

c) Encuentra un contraejemplo que pruebe que aunque f' sea par esto no implica que f sea impar.

8.- ¿Es cierto que

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} \quad ?$$

9.- Halla el área del triángulo determinado por el eje X y las rectas tangente y normal a la gráfica de $f(x) = 9 - x^2$ en el punto $(2, 5)$.

10.- (*) Estudia si existe algún valor de x para el que la tangente a $f(x) = x/(x+1)$ sea paralela a la secante que conecta los puntos $(1, f(1))$ y $(3, f(3))$.