Estadística I
Grado en Matemáticas, UAM, 2015-2016

Hoja 4bis. Información. Cota de Cramér-Rao

Nota: en los ejercicios que siguen, $I_X(\theta)$ denota el *número de información*, esto es, la varianza de la variable de información
$$Y = \partial_\theta \ln(f(X;\theta))$$
asociada a la variable X con función de densidad/masa $f(x;\theta)$.

1. Queremos estimar el parámetro μ de una $X \sim \mathcal{N}(\mu, 1)$.
Comprueba que $\overline{X}$ es el estimador de máxima verosimilitud de μ. Comprueba que el número de información $I_X(\mu)$ es $I_X(\mu) \equiv 1$ y que $\overline{X}$ es el estimador insesgado de mínima varianza.

2. Queremos estimar el parámetro $\theta = \sigma^2$ de una $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.
Comprueba que el número de información es $I_X(\theta) = 1/(2\theta^2)$.
Analiza si la cuasivarianza muestral S^2 es un estimador de mínima varianza.

3. Queremos estimar el parámetro $\theta = 1/p$ de una $X \sim \textsc{geo}(p)$. Recuerda que $\mathbf{E}_\theta(X) = \theta$ y que $\mathbf{V}_\theta(X) = \theta^2 - \theta$.
a) Comprueba que el número de información es $I_X(\theta) = \frac{1}{\theta(1-\theta)}$.
b) Deduce que $\overline{X}$ es el estimador insesgado de mínima varianza.

4. Sea X una variable con función de densidad $f(x;\theta) = \frac{1}{\theta}\, x^{1/\theta - 1}$ para $0 < x < 1$, donde $\theta > 0$ es un parámetro.
a) Comprueba primero que, para cada entero $k \geq 0$,
$$\mathbf{E}_\theta\big(\big(\ln(1/X)\big)^k\big) = \theta^k\, \Gamma(k+1) = \theta^k\ k!$$
(sugerencia: cambio de variables $x = e^{-\theta y}$).
b) Deduce que $\mathbf{E}_\theta(\ln(1/X)) = \theta$ y $\mathbf{V}_\theta(\ln(1/X)) = \theta^2$.
c) Comprueba que $I_X(\theta) = 1/\theta^2$.
d) Considera el estadístico
$$T(X_1, \dots, X_n) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \ln\Big(\frac{1}{X_j}\Big).$$
Comprueba que T es estimador insesgado de mínima varianza de θ.

5. Digamos que la variable X tiene función de densidad/masa $f(x;\theta)$. Sea T un estimador (no necesariamente insesgado) de θ. Llamemos $h_T(\theta) = \mathbf{E}_\theta(T)$ (si el estimador es insesgado, entonces $h_T(\theta) = \theta$). Comprueba que la cota de Cramér–Rao para este caso general sería
$$\frac{\mathbf{V}_\theta(T)}{h_T'(\theta)^2} \geq \frac{1}{n\, I_X(\theta)}.$$
(Sugerencia: sigue los pasos de la prueba de Cramér–Rao para el caso de estimadores insesgados).