Probabilidad I
Segundo de Matemáticas, Curso 2003-2004

Hoja 4

Variables aleatorias continuas

1. Si X tiene función de distribución $F_X(x)$, ¿cuál es la función de distribución de $Y = \max(X, 0)$?

2. Demostrar que si F_1 y F_2 son funciones de distribución, entonces también lo es la función $F(x)$ definida por $F(x) = \alpha\, F_1(x) + (1-\alpha)\, F_2(x)$, para cualquier α entre 0 y 1.

3. La variable aleatoria X tiene función de distribución $F_X(x)$ dada por $\frac{1}{2\,(1+x^2)}$ si $x \leq 0$ y por $\frac{1+2x^2}{2\,(1+x^2)}$ si $x > 0$. Mostrar que X es una variable aleatoria continua y determinar su función de densidad.

4. Determinar las funciones de distribución correspondientes a las funciones de densidad siguientes: (a) $f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$; (b) $f(x) = \exp\left(-x - e^{-x}\right)$; (c) $f(x) = \frac{1}{\pi}\left[x\,(1-x)\right]^{-1/2}\ \chi_{(0,1)}(x)$.

5. La variable aleatoria X sigue una distribución exponencial de parámetro λ. Encontrar las funciones de densidad de las variables aleatorias $A = 2X + 5$, $B = e^X$, $C = (1+X)^{-1}$, $D = (1+X)^{-2}$.

6. Si X es una variable aleatoria $N(\mu, \sigma)$, encontrar la función de densidad de $Y = e^X$ y también $\mathbf{E}(Y)$ (la variable Y se dice que tiene una **distribución lognormal** de parámetros μ y σ).

7. Si Y es una variable aleatoria uniforme en $(0, 5)$, ¿cuál es la probabilidad de que las raíces de la ecuación $4x^2 + 4xY + Y + 2 = 0$ sean reales?

8. Calcular la media y la varianza de la variable X, cuya función de densidad viene dada por

$$(a)\ f(x) = \lambda\, e^{-\lambda\, x}\ \chi_{(0,\infty)}(x)\,; \quad (b)\ f(x) = \frac{1}{2}\, c\, e^{-c|x|}, \quad \text{donde } c > 0 \text{ es un parámetro.}$$

9. Sea X una variable aleatoria cuya función de distribución F_X es continua. Demostrar que la variable aleatoria $Y = F(X)$ está uniformemente distribuida en $(0, 1)$.

10. Sea F una función de distribución y X una variable aleatoria uniforme en $(0, 1)$. Se define la inversa de F como $F^{-1}(y) = \inf\{x \in \mathbb{R} \,:\, F(x) \geq y\}$. Comprobar que la variable aleatoria $Y = F^{-1}(X)$ tiene función de distribución F.

11. Si X es una variable aleatoria continua que toma sólo valores no negativos, comprobar que $\mathbf{E}(X) = \int_0^\infty \left[1 - F_X(x)\right]\, dx$.

12. El cociente de inteligencia es una variable aleatoria que sigue una distribución $N(100, 16)$. Calcular: (a) La probabilidad de que un individuo elegido al azar tenga un cociente superior a 120. (b) Suponiendo que un individuo con carrera universitaria debe tener un cociente superior a 110, hallar la probabilidad de que un licenciado tenga un cociente superior a 120.

13. Un botánico ha observado que la anchura, X, de las hojas del álamo sigue una distribución $N(\mu, \sigma)$ con $\mu = 6$ cm. Si el 90% de las hojas tienen una anchura inferior a 7.5 cm, hallar σ.

14. La duración, en minutos, de las conferencias en un congreso sigue una distribución $N(\mu, \sigma)$. Hallar μ y σ sabiendo que el 60% de las conferencias duran más de 40 minutos y el 55% menos de 50 minutos.

Varias variables aleatorias (continuas)

15. X e Y son dos variables aleatorias independientes que siguen distribuciones exponenciales de parámetros λ y μ, respectivamente. Muéstrese que $Z = \min\{X, Y\}$ sigue una distribución exponencial de parámetro $\lambda + \mu$.

16. $X_1, \dots, X_n$ son variables aleatorias i.i.d. con función de distribución F y de densidad f (común a todas ellas). Definimos $U = \min\{X_1, \dots, X_n\}$ y $V = \max\{X_1, \dots, X_n\}$. Obtener las funciones de distribución y densidad de U y V, así como la función de densidad conjunta de U y V.

17. Una compañía compra 100 bombillas, cada una de las cuales tiene un tiempo de vida que es una variable aleatoria exponencial de media 1000 horas. Calcular el tiempo esperado en el que fallará la primera de ellas.

18. Sea X_1, X_2 una sucesión de variables aleatorias continuas i.i.d. Sea N el (único) índice para el que $X_1 \geq X_2 \geq \cdots \geq X_{N-1}$ y $X_{N-1} < X_N$. Probar que $\mathbf{P}(N = k) = (k-1)/k!$ y que $\mathbf{E}(N) = e$.

19. Sean X e Y variables aleatorias i.i.d. con distribución conjunta uniforme en $[0,1] \times [0,1]$. Hallar $\mathbf{E}(|X - Y|)$, $\mathbf{E}(\max\{X, Y\})$, $\mathbf{E}(\min\{X, Y\})$, $\mathbf{E}(X^2 + Y^2)$ y $\mathbf{E}((X+Y)^2)$.

20. Las variables aleatorias X e Y están uniformemente distribuidas en el disco unidad. Esto es, $F_{X,Y}(x, y) = 1/\pi$ si $x^2 + y^2 \leq 1$ y vale 0 en otro caso. Calcular $\mathbf{E}(\sqrt{X^2 + Y^2})$ y $\mathbf{E}(X^2 + Y^2)$.

21. A, B y C son variables aleatorias i.i.d, con distribución uniforme en $(0,1)$ cada una de ellas. ¿Cuál es su función de distribución conjunta? Calcular la probabilidad de que la ecuación cuadrática $Ax^2 + Bx + C = 0$ tenga dos raíces reales distintas.

22. X e Y tienen función de densidad conjunta dada por $f_{X,Y}(x, y) = e^{-\gamma}$ si $0 < x < y < \infty$ (y 0 en otro caso). Calcular $\mathbf{E}(X \,|\, Y = y)$ y $\mathbf{E}(Y \,|\, X = x)$.

23. Verificar si lo siguiente es cierto: el par (U, V) tiene función de densidad conjunta normal bivariante con parámetros $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$, $\sigma_1, \sigma_2 > 0$ y $-1 < \rho < 1$. Definimos $X = \frac{U-\mu_1}{\sigma_1}$ e $Y = \frac{V-\mu_2}{\sigma_2}$. Entonces X e Y siguen una distribución normal estándar bivariante.

24. Si U y V son como en el ejercicio anterior, calcular $\mathbf{E}(UV) - \mathbf{E}(U)\mathbf{E}(V)$ y $\mathbf{E}(V \,|\, U = u)$.

25. Probar que si X e Y son variables aleatorias independientes con distribución $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, entonces $Z = Y/X$ sigue una distribución de Cauchy. Deducir que si (R, θ) es la representación en polares del punto (X, Y), entonces θ está uniformemente distribuida en $[0, 2\pi]$. ¿Cuál es la distribución de R^2?

26. Sean X e Y variables aleatorias tales que $V(X) = V(Y)$ y $0 < V(X+Y) < \infty$, $0 < V(X-Y) < \infty$. Probar que $X + Y$ y $X - Y$ son incorreladas.

27. La función de densidad conjunta de X e Y viene dada por $f(x, y) = xe^{-(x+y)}$, $0 \leq x, y < \infty$. ¿Son independientes? ¿Y si $f(x, y) = 2$, $0 \leq x < y < 1$?

28. La variable X tiene densidad $f_X(x) = x \exp(-x^2/2)\, \chi_{[0,\infty)}(x)$. La variable Y, independiente de la anterior, es uniforme en $[-\varepsilon, \varepsilon]$. Si llamamos $Z = X + Y$, hallar $f_Z(z)$ y calcular $\mathbf{P}(Z > \varepsilon)$.

29. X e Y son variables aleatorias i.i.d. (ambas siguen una distribución exponencial de parámetro λ). Encontrar la función de distribución y la función de densidad de las variables aleatorias $A = 1 - e^{-\lambda X}$, $B = \min\{X, Y\}$ y $C = X - Y$. Calcular la probabilidad de que $\max\{X, Y\} \leq aX$, donde a es un cierto número real.

30. X e Y son variables aleatorias i.i.d. (ambas normales de media 0 y varianza 1). (a) Mostrar que $W = 2X - Y$ sigue una distribución normal. ¿Cuáles son su media y su varianza? (b) Encontrar la media de $Z = X^2/(X^2 + Y^2)$. (c) Calcular la media de V/U, donde $U = \max\{|X|, |Y|\}$ y $V = \min\{|X|, |Y|\}$.

31. Una fuente emite una partícula en tiempo cero. En un cierto instante (aleatorio) S se desintegra y uno de los productos de esa desintegración se observa en tiempo T, $T \geq S$. La variable T tiene densidad $f_T(t) = \lambda^2\, t\, e^{-\lambda t}\, \chi_{(0,\infty)}$. Además, para cada $t > 0$, la distribución de S condicionada a que $T = t$ es uniforme en $(0, t)$. Hallar la densidad conjunta de S y T. Calcular la densidad conjunta de S y $T - S$ y mostrar que estas dos son variables aleatorias i.i.d. Si llamamos $Z = \max\{S, T - S\}$, ¿cuál es la función de densidad de Z?