Probabilidad I
Segundo de Matemáticas
Curso 2002-2003

Hoja 4

Variables aleatorias continuas

1. Demostrar que si X es una variable aleatoria y c es un número real para el que $\mathbf{P}(X = c) > 0$, entonces la función de distribución de X, $F_X(x)$, es discontinua en $x = c$. ¿Es el recíproco cierto?

2. Si X tiene función de distribución $F_X(x)$, ¿cuál es la función de distribución de $Y = \max(X, 0)$?

3. Demostrar que si F_1 y F_2 son funciones de distribución, entonces también lo es la función $F(x)$ definida por $F(x) = \alpha\, F_1(x) + (1-\alpha)\, F_2(x)$, para cualquier α entre 0 y 1.

4. La variable aleatoria X tiene función de distribución dada por

$$F_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\,(1+x^2)} & \text{si } x \leq 0, \\ \dfrac{1+2x^2}{2\,(1+x^2)} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Mostrar que X es una variable aleatoria continua y determinar su función de densidad.

5. Determinar las funciones de distribución correspondientes a las funciones de densidad siguientes:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} e^{-|x|}\,; \\ f(x) &= \exp\left(-x - e^{-x}\right)\,; \\ f(x) &= \frac{1}{\pi}\,[x\,(1-x)]^{-1/2}\ \chi_{(0,1)}(x)\,. \end{aligned}$$

6. La función gamma $\Gamma(w)$ se define, para $w > 0$, como

$$\Gamma(w) = \int_0^\infty x^{w-1}\, e^{-x}\, dx\,.$$

Demostrar que se cumple que $\Gamma(w+1) = w\,\Gamma(w)$. Deducir de aquí que, si w es un número natural, digamos $w = n$, entonces $\Gamma(n) = (n-1)!$. Comprobar que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

7. La **distribución gamma** de parámetros $w, \lambda > 0$ tiene función de densidad

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(w)}\, \lambda^w\, x^{w-1}\, e^{-\lambda\, x}\ \chi_{(0,\infty)}(x)\,.$$

a) Si elegimos los parámetros $w = \lambda = 1/2$, nos encontramos con la la llamada **distribución chi-cuadrado** χ^2 (con un grado de libertad). Comprobar que es la distribución que sigue una variable $Y = X^2$, si es que X sigue una normal $\mathcal{N}(0,1)$.

b) Comprobar también que la distribución exponencial de parámetro λ es también un caso particular de la distribución gamma.

c) Si X sigue una distribución gamma de parámetros w y λ, ¿qué distribución sigue la variable $Y = cX$, con $c > 0$?

8. La variable aleatoria X sigue una distribución exponencial de parámetro λ. Encontrar las funciones de densidad de las variables aleatorias

$$A = 2X + 5\,, \quad B = e^X\,, \quad C = (1+X)^{-1}\,, \quad D = (1+X)^{-2}\,.$$

9. Si X es una variable aleatoria $N(\mu, \sigma)$, encontrar la función de densidad de $Y = e^X$. La variable Y se dice que tiene una **distribución lognormal** de parámetros μ y σ.

10. Si Y es una variable aleatoria uniforme en $(0, 5)$, ¿cuál es la probabilidad de que las raíces de la ecuación $4x^2 + 4xY + Y + 2 = 0$ sean reales?

11. Calcular la media y la varianza de la variable X, cuya función de densidad viene dada por

a) $f(x) = \lambda\, e^{-\lambda\, x}\ \chi_{(0,\infty)}(x)$

b) $f(x) = \frac{1}{2}\, c\, e^{-c|x|}$, donde $c > 0$ es un parámetro.

12. Sea X una variable aleatoria cuya función de distribución F_X es continua. Demostrar que la variable aleatoria $Y = F(X)$ está uniformemente distribuida en $(0, 1)$.

13. Sea F una función de distribución y X una variable aleatoria uniforme en $(0, 1)$. Se define la inversa de F como

$$F^{-1}(y) = \inf\{x \in \mathbb{R} \,:\, F(x) \geq y\}\,.$$

Comprobar que la variable aleatoria $Y = F^{-1}(X)$ tiene función de distribución F.

14. Si X es una variable aleatoria continua que toma sólo valores no negativos, comprobar que

$$\mathbf{E}(X) = \int_0^\infty [1 - F_X(x)]\, dx\,.$$

15. La **paradoja de Bertrand**:

a) Elegimos un punto P al azar en un círculo de radio a. ¿Cuál es la probabilidad de que la distancia del punto P al centro del círculo sea menor que d? Sea X la longitud de la cuerda en el círculo de la que P es el punto medio. Mostrar que $\mathbf{P}(X > \sqrt{3}\, a) = 1/4$.

b) Ahora elegimos una cuerda de otra manera: fijamos un punto Q sobre la circunferencia y elegimos otro punto R al azar. Llamamos Y a la longitud QR. Demostrar que $\mathbf{P}(Y > \sqrt{3}a) = 1/3$.

c) ¿Qué ocurre si procedemos como en el apartado b), pero eligiendo ambos puntos, Q y R, al azar?

d) Ahora escogemos un punto P al azar sobre la circunferencia de radio r (donde $r < a$ es un radio cualquiera). Llamamos Z a la longitud de la cuerda de la que P es punto medio. Probar que $\mathbf{P}(Z > \sqrt{3}\, a) = 1/2$.

16. El cociente de inteligencia es una variable aleatoria que sigue una distribución $N(100, 16^2)$. Calcular:

a) La probabilidad de que un individuo elegido al azar tenga un cociente superior a 120.

b) Suponiendo que un individuo con carrera universitaria debe tener un cociente superior a 110, hallar la probabilidad de que un licenciado tenga un cociente superior a 120.

17. Un botánico ha observado que la anchura, X, de las hojas del álamo sigue una distribución $N(\mu, \sigma)$ con $\mu = 6$ cm. Si el 90% de las hojas tienen una anchura inferior a 7.5 cm, hallar σ.

18. La duración, en minutos, de las conferencias en un congreso sigue una distribución $N(\mu, \sigma)$. Hallar μ y σ sabiendo que el 60% de las conferencias duran más de 40 minutos y el 55% menos de 50 minutos

19. En una población, la cantidad de plomo presente en la sangre de una persona elegida al azar, X, es una variable aleatoria con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} x/300 & \text{si } 0 < x < 20 \\ (50 - x)/1350 & \text{si } 20 < x < 50. \end{cases}$$

a) Calcular la cantidad media de plomo en sangre.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la cantidad de plomo en la sangre de una persona elegida al azar sea menor de 20?

c) Si elegimos 40 personas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que haya entre 20 y 30 con una cantidad de plomo en sangre inferior a 20?

Varias variables aleatorias (continuas)

20. La función $G(x, y)$ que vale 1 si $x + y \geq 0$ y 0 en otro caso, ¿puede ser la función de distribución conjunta de un par de variables aleatorias?

21. X e Y son dos variables aleatorias independientes que siguen distribuciones exponenciales de parámetros λ y μ, respectivamente. Muéstrese que $Z = \min\{X, Y\}$ sigue una distribución exponencial de parámetro $\lambda + \mu$.

22. $X_1, \ldots, X_n$ son variables aleatorias i.i.d. con función de distribución F y de densidad f (común a todas ellas). Definimos $U = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$ y $V = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$. Obtener las funciones de distribución y densidad de U y V, así como la función de densidad conjunta de U y V.

23. Una compañía compra 100 bombillas, cada una de las cuales tiene un tiempo de vida que es una variable aleatoria exponencial de media 1000 horas. Calcular el tiempo esperado en el que fallará la primera de ellas.

24. Sea X_1, X_2 una sucesión de variables aleatorias continuas i.i.d. Sea N el (único) índice para el que

$$X_1 \geq X_2 \geq \cdots \geq X_{N-1} \quad \text{y} \quad X_{N-1} < X_N\,.$$

Probar que $\mathbf{P}(N = k) = (k - 1)/k!$ y que $\mathbf{E}(N) = e$.

25. Sean X e Y variables aleatorias i.i.d. con distribución conjunta uniforme en $[0, 1] \times [0, 1]$. Hallar $\mathbf{E}(|X - Y|)$, $\mathbf{E}(\max\{X, Y\})$, $\mathbf{E}(\min\{X, Y\})$, $\mathbf{E}(X^2 + Y^2)$ y $\mathbf{E}((X + Y)^2)$.

26. Las variables aleatorias X e Y están uniformemente distribuidas en el disco unidad:

$$F_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 1/\pi & \text{si } x^2 + y^2 \leq 1; \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Calcular $\mathbf{E}(\sqrt{X^2 + Y^2})$ y $\mathbf{E}(X^2 + Y^2)$.

27. Encontrar un ejemplo de variables X e Y continuas y dependientes para las que $\mathbf{E}(XY) = \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)$.

28. A, B y C son variables aleatorias i.i.d, con distribución uniforme en $(0, 1)$ cada una de ellas. ¿Cuál es su función de distribución conjunta? Calcular la probabilidad de que la ecuación cuadrática $Ax^2 + Bx + C = 0$ tenga dos raíces reales distintas.

29. X e Y tienen función de densidad conjunta dada por $f_{X,Y}(x,y) = e^{-\gamma}$ si $0 < x < y < \infty$ (y 0 en otro caso). Calcular $\mathbf{E}(X \mid Y = y)$ y $\mathbf{E}(Y \mid X = x)$.

30. Verificar si lo siguiente es cierto: el par (U, V) tiene función de densidad conjunta normal bivariante con parámetros $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$, $\sigma_1, \sigma_2 > 0$ y $-1 < \rho < 1$. Definimos

$$X = \frac{U - \mu_1}{\sigma_1} \quad \text{e} \quad Y = \frac{V - \mu_2}{\sigma_2}.$$

Entonces X e Y siguen una distribución normal estándar bivariante.

31. Si U y V son como en el ejercicio anterior, calcular $\mathbf{E}(UV) - \mathbf{E}(U)\mathbf{E}(V)$ y $\mathbf{E}(V \mid U = u)$.

32. Sea $X_1, X_2, \ldots$ una sucesión de variables aleatorias i.i.d, con distribución exponencial de parámetro λ común a todas ellas. Definimos $S_0 = 0$ y $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, para cada $n \geq 1$. Probar que la función de densidad de S_n viene dada por

$$f_n(x) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x} \chi_{(0,\infty)}.$$

Fijemos ahora un $t > 0$ y consideremos $N(t) = \max\{n : S_n \leq t\}$. Comprobar que $N(t)$ sigue una distribución de Poisson (Sugerencia: condicionar sobre $S_n = s$, $s < t$).

33. Probar que si X e Y son variables aleatorias independientes con distribución $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, entonces $Z = Y/X$ sigue una distribución de Cauchy. Deducir que si (R, θ) es la representación en polares del punto (X, Y), entonces θ está uniformemente distribuida en $[0, 2\pi]$. ¿Cuál es la distribución de R^2?

34. Sea X una variable aleatoria con distribución simétrica con respecto al origen, tal que $0 < E(X^4) < \infty$, y sea $Y = X^2$. Mostrar que X e Y son incorreladas.

35. Sean X e Y variables aleatorias tales que $V(X) = V(Y)$ y $0 < V(X+Y) < \infty$, $0 < V(X-Y) < \infty$. Probar que $X+Y$ y $X-Y$ son incorreladas.

36. La función de densidad conjunta de X e Y viene dada por $f(x,y) = xe^{-(x+y)}$, $0 \leq x, y < \infty$. ¿Son independientes? ¿Y si $f(x,y) = 2$, $0 \leq x < y < 1$?

37. Una fuente emite una partícula en tiempo cero. En un cierto instante (aleatorio) S se desintegra y uno de los productos de esa desintegración se observa en tiempo T, $T \geq S$. La variable T tiene densidad

$$f_T(t) = \lambda^2 t e^{-\lambda t} \chi_{(0,\infty)}.$$

Además, para cada $t > 0$, la distribución de S condicionada a que $T = t$ es uniforme en $(0, t)$. Hallar la densidad conjunta de S y T. Calcular la densidad conjunta de S y $T - S$ y mostrar que estas dos son variables aleatorias i.i.d. Si llamamos $Z = \max\{S, T - S\}$, ¿cuál es la función de densidad de Z?

38. La variable X tiene densidad $f_X(x) = x \exp(-x^2/2)\, \chi_{[0,\infty)}(x)$. La variable Y, independiente de la anterior, es uniforme en $[-\varepsilon, \varepsilon]$. Si llamamos $Z = X + Y$, hallar $f_Z(z)$ y calcular $\mathbf{P}(Z > \varepsilon)$.

39. X e Y son variables aleatorias i.i.d. (ambas siguen una distribución exponencial de parámetro λ). Encontrar la función de distribución y la función de densidad de las variables aleatorias $A = 1 - e^{-\lambda X}$, $B = \min\{X, Y\}$ y $C = X - Y$. Calcular la probabilidad de que $\max\{X, Y\} \leq aX$, donde a es un cierto número real.

40. X e Y son variables aleatorias i.i.d. (ambas, normales de media 0 y varianza 1).

(a) Mostrar que $W = 2X - Y$ sigue una distribución normal. ¿Cuáles son su media y su varianza?

(b) Encontrar la media de $Z = X^2/(X^2 + Y^2)$.

(c) Calcular la media de V/U, donde $U = \max\{|X|, |Y|\}$ y $V = \min\{|X|, |Y|\}$.