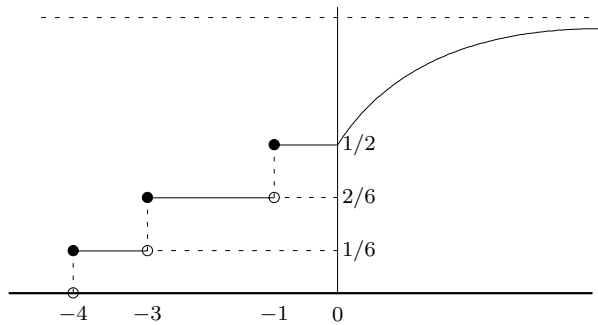


Probabilidad II
Tercero de Matemáticas
Curso 2007-2008

Hoja 4 (leyes de los grandes números II)

Nota: estos primeros ejercicios no deberían estar realmente en esta hoja. Pero, visto el examen parcial, quizás es un buen momento para repasar ciertos cálculos de momentos de una variable aleatoria.

1. Sea X una variable aleatoria con la siguiente (algo extraña) función de distribución $F_X(x)$:



Para $x \geq 0$, $F_X(x)$ viene dada por
 $1 - \frac{1}{2}e^{-\lambda x}$, para cierto $\lambda > 0$.

- Calcula $\mathbf{E}(X)$, $\mathbf{V}(X)$, $\mathbf{E}(e^X)$ y $\mathbf{P}(X > 3)$. Halla el valor de λ para el que $\mathbf{P}(X > 1) = 75\%$,
2. Sea X una variable aleatoria $\text{Bin}(30, 0.4)$. Obtén una fórmula para $\mathbf{E}(e^X)$ y calcula numéricamente su valor.
3. Sean $X_1, X_2, \dots$ unas variables aleatorias i.i.d. Cada variable toma los valores $+1$ y -1 con probabilidad $1/2$. Sea $S_n = \sum_{j=1}^n X_j$. Obtén fórmulas explícitas para

$$\mathbf{E}(S_n), \quad \mathbf{E}(S_n^2), \quad \mathbf{E}(S_n^3), \quad \mathbf{E}(S_n^4), \quad \mathbf{E}(S_n^5) \quad \text{y} \quad \mathbf{E}(S_n^6).$$

4. ¡Vuelve a hacer los cálculos del ejercicio 11 de la Hoja 1!

Sea (X_n) una sucesión de variables aleatorias, y sea $A_n^\varepsilon = \{|X_n| > \varepsilon\}$. Sabemos que

- $X_n \xrightarrow{\text{P}} 0 \iff \mathbf{P}(A_n^\varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ para todo $\varepsilon > 0$.
- $X_n \xrightarrow{\text{c.s.}} 0 \iff \mathbf{P}(\cup_{k \geq n} A_k^\varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ para todo $\varepsilon > 0$.

De lo que se deduce inmediatamente que la convergencia casi segura implica la convergencia en probabilidad.

También sabemos (por el lema de Borel-Cantelli) que

- $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_n^\varepsilon) < +\infty$ para todo $\varepsilon > 0 \implies X_n \xrightarrow{\text{c.s.}} 0$.

5. Supongamos que la sucesión (X_n) converge a 0 en probabilidad. Comprueba que existe una subsucesión (X_{n_k}) que converge a 0 casi seguro.

6. Comprueba que

a) Si $X_n \xrightarrow{\text{c.s.}} X$ e $Y_n \xrightarrow{\text{c.s.}} Y$, entonces $X_n + Y_n \xrightarrow{\text{c.s.}} X + Y$.

b) Si $X_n \xrightarrow{P} X$ e $Y_n \xrightarrow{P} Y$, entonces $X_n + Y_n \xrightarrow{P} X + Y$.

7. (a) Supongamos que $\mathbf{E}(|X_n|) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Prueba que $X_n \xrightarrow{P} 0$.

(b) Comprueba que si $\mathbf{E}(X_n^2) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, entonces $\mathbf{E}(|X_n|) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ (y, por tanto, $X_n \xrightarrow{P} 0$).

(c) En el espacio de probabilidad habitual $(\Omega = [0, 1])$ con los borelianos y la medida de Lebesgue, considera las sucesiones de variables aleatorias

$$X_n = n \mathbf{1}_{(0, 1/n)} \quad \text{y} \quad X_n = \sqrt{n} \mathbf{1}_{(0, 1/n)}$$

Comprueba si convergen a 0 casi seguro (y por tanto en probabilidad). ¿A qué convergen $\mathbf{E}(X_n)$ y $\mathbf{E}(X_n^2)$ en cada caso?

8. Ya hemos usado en clase la Ley fuerte de los grandes números para probar que casi todos los números en $[0, 1]$ son *normales*. Comprueba ahora que casi todos los números entre $[0, 1]$ cumplen que, en su desarrollo decimal, aparece infinitas veces la secuencia 78.

9. a) Considera una sucesión de variables aleatorias (H_n) positivas, tales que $\mathbf{E}(H_n) \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$ y tales que

$$\frac{\mathbf{E}(H_n^2)}{\mathbf{E}(H_n)^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \quad \left(\text{es decir, } \frac{\mathbf{V}(H_n)}{\mathbf{E}(H_n)^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \right)$$

Comprueba que, para todo $\delta > 0$,

$$\mathbf{P}(|H_n - \mathbf{E}(H_n)| > \delta \mathbf{E}(H_n)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Toma $\delta = 1/2$ en la expresión anterior para comprobar que $\mathbf{P}(H_n > \mathbf{E}(H_n)/2) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ y deduce que

$$H_n \xrightarrow{P} \infty \quad \left(\text{es decir, } 1/H_n \xrightarrow{P} 0 \right)$$

b) Consideremos ahora unos sucesos A_j independientes dos a dos tales que $\sum_{j=1}^n \mathbf{P}(A_n) = +\infty$. Sean $X_j = \mathbf{1}_{A_j}$. Definimos

$$H_n = \sum_{j=1}^n X_j.$$

- Comprueba que $\mathbf{V}(H_n) \leq \mathbf{E}(H_n)$;
- utiliza el apartado a) para comprobar que $H_n \xrightarrow{P} \infty$;
- y deduce finalmente el lema de Borel-Cantelli (inverso): $\mathbf{P}(A_n \text{ i.v.}) = 1$.