

Geometría II
Segundo de Matemáticas
Curso 2005-2006

Hoja 4 (Geometría intrínseca)

1. Sea una superficie S parametrizada por una carta $\mathbb{X}(u, v)$. Pruébese que

- a) si los coeficientes de la primera forma fundamental son $E(u, v) = G(u, v) = \lambda^2(u, v)$, $F(u, v) = 0$, entonces la curvatura gaussiana K viene dada por

$$K = -\frac{1}{\lambda^2} \left[(\log(\lambda))_{uu} + (\log(\lambda))_{vv} \right].$$

- b) Y que si los coeficientes son $E(u, v) = G(u, v) = 1$, $F(u, v) = \cos(\theta)$, donde θ es el ángulo formado por $\mathbb{X}_u$ y $\mathbb{X}_v$, entonces

$$K = -\frac{\theta_{uv}}{\sin(\theta)}.$$

2. Compruébese que no hay superficie alguna con $E = G = 1$, $F = 0$ que tenga de coeficientes de la segunda forma fundamental a $e = 1$, $f = 0$, $g = -1$.

3. Sea S una superficie parametrizada por con una carta $\mathbb{X}(u, v)$ para la que $F(u, v) \equiv 0$. Sea $\alpha(t) = \mathbb{X}(u(t), v(t))$ una curva parametrizada por longitud de arco (obsérvese que su traza está contenida en S).

- a) Obténganse las condiciones que deben verificar las funciones $u(t)$ y $v(t)$ para que α sea una geodésica de S .
- b) Obténganse las geodésicas si $E(u, v) = 1$, $F(u, v) = 0$ y $G(u, v) = u^2$.

4. Sea f un difeomorfismo de S en $\bar{S}$ que conserva áreas (si $A \subset S$, entonces $\text{área}(A) = \text{área}(f(A))$). Tomemos una carta $\mathbb{X}(u, v) : U \rightarrow S$ y la correspondiente carta $\bar{\mathbb{X}}(u, v) = (f \circ \mathbb{X})(u, v)$ en $\bar{S}$. Compruébese que, entonces, para todo $(u, v) \in U$,

$$E(u, v)G(u, v) - F(u, v)^2 = \bar{E}(u, v)\bar{G}(u, v) - \bar{F}(u, v)^2,$$

donde E, F, G y $\bar{E}, \bar{F}, \bar{G}$ son los coeficientes de la primera forma fundamental en las respectivas parametrizaciones.

5. Consideremos un difeomorfismo f de S en $\bar{S}$. Decimos que f conserva ángulos si, dadas dos curvas α y β en S que intersecan con cierto ángulo θ , las correspondientes curvas imagen $f \circ \alpha$ y $f \circ \beta$ se cortan en $\bar{S}$ con el mismo ángulo.

- a) Compruébese que, para todo $\mathbf{p} \in S$,

$$\frac{\langle T_{\mathbf{p}}f(\mathbf{v}), T_{\mathbf{p}}f(\mathbf{w}) \rangle}{\|T_{\mathbf{p}}f(\mathbf{v})\| \|T_{\mathbf{p}}f(\mathbf{w})\|} = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle}{\|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\|} \quad \text{para cualesquiera } \mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_{\mathbf{p}}S.$$

b) Compruébese que, tomando coordenadas como en el ejercicio anterior, se tiene que

$$E(u, v) = \lambda(u, v)^2 \bar{E}(u, v), \quad F(u, v) = \lambda(u, v)^2 \bar{F}(u, v), \quad G(u, v) = \lambda(u, v)^2 \bar{G}(u, v),$$

donde $\lambda(u, v)$ es una función diferenciable no nula.

6. Sea f un difeomorfismo entre dos superficies. Pruébese que f conserva ángulos y áreas si y sólo si f es isometría.

7. Compruébese que una isometría f de S en $\bar{S}$ lleva geodésicas de S en geodésicas de $\bar{S}$.

8. Justifíquese por qué las superficies que siguen no son localmente isométricas entre sí (dos a dos): (a) Esfera; (b) Cilindro; (c) Silla ($z = xy$).

9. Consideremos las dos siguientes superficies: la esfera unidad $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ y el cilindro $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$; y la aplicación

$$\varphi : S^2 \setminus \{0, 0, \pm 1\} \longrightarrow C$$

dada como sigue: si $\mathbf{p} \in S^2 \setminus \{0, 0, \pm 1\}$, sea $\varphi(\mathbf{p})$ el punto de corte con C del rayo con origen en el eje OZ y perpendicular a OZ que pasa por $\mathbf{p}$.

Verifíquese que φ conserva áreas, pero no es isometría.

10. Verifíquese que las superficies dadas por

$$\mathbb{X}(u, v) = (u \cos(v), u \sin(v), \log(u)) \quad \text{e} \quad \mathbb{Y}(u, v) = (u \cos(v), u \sin(v), v)$$

tienen la misma curvatura gaussiana en los puntos $\mathbb{X}(u, v)$ e $\mathbb{Y}(u, v)$. Pero que, sin embargo, la aplicación f que lleva cada punto $\mathbb{X}(u, v)$ en $\mathbb{Y}(u, v)$ no es una isometría.

11. Vamos a comprobar que el cono de una hoja (al que le quitamos el vértice) $z = +k\sqrt{x^2 + y^2}$ es (localmente) isométrico a un plano. Para ello, consideramos el abierto $U \subset \mathbb{R}^2$ descrito (en polares) como $\{(\rho, \theta) : 0 < \rho < \infty, 0 < \theta < 2\pi \sin(\alpha)\}$. Y consideramos la aplicación $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ siguiente:

$$f(\rho, \theta) = \left(\rho \sin(\alpha) \cos\left(\frac{\theta}{\sin(\alpha)}\right), \rho \sin(\alpha) \sin\left(\frac{\theta}{\sin(\alpha)}\right), \rho \cos(\alpha) \right).$$

Interpreta geoméricamente (¡o papirofléxicamente!) esta transformación y comprueba que $f(U)$ recorre el cono menos una generatriz. Verifica, finalmente, que f es una isometría.