**Geometría II**
**Segundo de Matemáticas**
**Curso 2004-2005**

**Hoja 4 (Geometría intrínseca)**

**1.** Sea $f$ un difeomorfismo de $S$ en $\bar{S}$ que conserva áreas (si $A \subset S$, entonces área $(A) =$ área $(f(A))$). Tomemos una carta $\mathbb{X}(u,v) : U \to S$ y la correspondiente carta $\bar{\mathbb{X}}(u,v) = (f \circ \mathbb{X})(u,v)$ en $\bar{S}$. Compruébese que, entonces, para todo $(u,v) \in U$,

$$E(u,v)G(u,v) - F(u,v)^2 = \bar{E}(u,v)\bar{G}(u,v) - \bar{F}(u,v)^2,$$

donde $E, F, G$ y $\bar{E}, \bar{F}, \bar{G}$ son los coeficientes de la primera forma fundamental en las respectivas parametrizaciones.

**2.** Consideremos un difeomorfismo $f$ de $S$ en $\bar{S}$. Decimos que $f$ conserva ángulos si, dadas dos curvas $\boldsymbol{\alpha}$ y $\boldsymbol{\beta}$ en $S$ que intersecan con cierto ángulo $\theta$, las correspondientes curvas imagen $f \circ \boldsymbol{\alpha}$ y $f \circ \boldsymbol{\beta}$ se cortan en $\bar{S}$ con el mismo ángulo.

a) Compruébese que, para todo $\mathbf{p} \in S$,

$$\frac{< T_{\mathbf{p}}f(\mathbf{v}), T_{\mathbf{p}}f(\mathbf{w}) >}{\|T_{\mathbf{p}}f(\mathbf{v})\| \, \|T_{\mathbf{p}}f(\mathbf{w})\|} = \frac{< \mathbf{v}, \mathbf{w} >}{\|\mathbf{v}\| \, \|\mathbf{w}\|} \qquad \text{para cualesquiera } \mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_{\mathbf{p}}S.$$

b) Compruébese que, tomando coordenadas como en el ejercicio anterior, se tiene que

$$E(u,v) = \lambda(u,v)^2 \, \bar{E}(u,v) \, , \qquad F(u,v) = \lambda(u,v)^2 \, \bar{F}(u,v) \, , \qquad G(u,v) = \lambda(u,v)^2 \, \bar{G}(u,v) \, ,$$

donde $\lambda(u,v)$ es una función diferenciable no nula.

**3.** Sea $f$ un difeomeorfismo entre dos superficies. Pruébese que $f$ conserva ángulos y áreas si y sólo si $f$ es isometría.

**4.** Consideremos las dos siguientes superficies: la esfera unidad $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1\}$ y el cilindro $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$; y la aplicación

$$\varphi : S^2 \setminus \{0, 0, \pm 1\} \longrightarrow C$$

dada como sigue: si $\mathbf{p} \in S^2 \setminus \{0, 0, \pm 1\}$, sea $\varphi(\mathbf{p})$ el punto de corte con $C$ del rayo con origen en el eje OZ y perpendicular a OZ que pasa por $\mathbf{p}$.

Verifíquese que $\varphi$ conserva áreas, pero no es isometría.

**5.** Compruébese que una isometría $f$ de $S$ en $\bar{S}$ lleva geodésicas de $S$ en geodésicas de $\bar{S}$.

**6.** Sea una superficie $S$ parametrizada por una carta $\mathbb{X}(u,v)$. Pruébese que

a) si los coeficientes de la primera forma fundamental son $E(u,v) = G(u,v) = \lambda^2(u,v)$, $F(u,v) = 0$, entonces la curvatura gaussiana $K$ viene dada por

$$K = -\frac{1}{\lambda^2}\Big[(\log(\lambda))_{uu} + (\log(\lambda))_{vv}\Big] \, .$$

b) Y que si los coeficientes son $E(u,v) = G(u,v) = 1$, $F(u,v) = \cos(\theta)$, donde $\theta$ es el ángulo formado por $\mathbb{X}_u$ y $\mathbb{X}_v$, entonces

$$K = -\frac{\theta_{uv}}{\sin(\theta)} \, .$$

**7.** Compruébese que no hay superficie alguna con $E = G = 1$, $F = 0$ que tenga de coeficientes de la segunda forma fundamental a $e = 1$, $f = 0$, $g = -1$.

**8.** Verifíquese que las superficies dadas por

$$\mathbb{X}(u, v) = (u\cos(v), u\sin(v), \log(u)) \qquad \text{e} \qquad \mathbb{Y}(u, v) = (u\cos(v), u\sin(v), v)$$

tienen la misma curvatura gaussiana en los puntos $\mathbb{X}(u, v)$ e $\mathbb{Y}(u, v)$. Pero que, sin embargo, la aplicación $f$ que lleva cada punto $\mathbb{X}(u, v)$ en $\mathbb{Y}(u, v)$ no es una isometría.

**9.** Justifíquese por qué las superficies que siguen no son localmente isométricas entre sí (dos a dos): (a) Esfera; (b) Cilindro; (c) Silla ($z = xy$).

**10.** Vamos a comprobar que el cono de una hoja (al que le quitamos el vértice) $z = +k\sqrt{x^2 + y^2}$ es (localmente) isométrico a un plano. Para ello, consideramos el abierto $U \subset \mathbb{R}^2$ descrito (en polares) como $\{(\rho, \theta) : 0 < \rho < \infty, 0 < \theta < 2\pi\sin(\alpha)\}$. Y consideramos la aplicación $f : U \to \mathbb{R}^3$ siguiente:

$$f(\rho, \theta) = \Big(\rho\sin(\alpha)\cos\Big(\frac{\theta}{\sin(\alpha)}\Big), \rho\sin(\alpha)\sin\Big(\frac{\theta}{\sin(\alpha)}\Big), \rho\cos(\alpha)\Big).$$

Interpreta geométricamente (¡o papirofléxicamente!) esta transformación y comprueba que $f(U)$ recorre el cono menos una generatriz. Verifica, finalmente, que $f$ es una isometría.

**11.** Sea $S$ una superficie parametrizada por con una carta $\mathbb{X}(u, v)$ para la que $F(u, v) \equiv 0$. Sea $\boldsymbol{\alpha}(t) = \mathbb{X}(u(t), v(t))$ una curva parametrizada por longitud de arco (obsérvese que su traza está contenida en $S$).

a) Obténganse las condiciones que deben verificar las funciones $u(t)$ y $v(t)$ para que $\boldsymbol{\alpha}$ sea una geodésica de $S$.

b) Obténganse las geodésicas si $E(u, v) = 1$, $F(u, v) = 0$ y $G(u, v) = u^2$.

**12.** Consideremos una superficie $S$ y una curva $\boldsymbol{\gamma}$ parametrizada por longitud de arco cuya traza está contenida en $S$. Definimos $S_{\boldsymbol{\gamma}}$, la *superficie de las normales*, como la superficie parametrizada por

$$\mathbb{X}(s, \lambda) = \boldsymbol{\gamma}(s) + \lambda\,\mathbf{N}(\boldsymbol{\gamma}(s)).$$

Hállese la curvatura gaussiana de $S_{\boldsymbol{\gamma}}$. ¿Cómo ha de ser la curva $\boldsymbol{\gamma}$ para que $S_{\boldsymbol{\gamma}}$ tenga curvatura gaussiana nula?