Sea $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias y X una variable aleatoria con función de distribución F. Se dice que X_n converge a X,

- en **media cuadrática** si $\mathbf{E}(|X_n - X|^2) \to 0$ cuando $n \to \infty$;
- en **probabilidad** si, para todo $\varepsilon > 0$, $\mathbf{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \to 0$ cuando $n \to \infty$;
- en **distribución** si, para todo t que sea punto de continuidad de F, $\mathbf{P}(X_n \leq t) \to F$ cuando $n \to \infty$.

1. Supongamos que la sucesión de variables aleatorias Z_n converge a la variable aleatoria Z en probabilidad (o en distribución). Sean a y b números reales. Comprueba que la sucesión $aZ_n + b$ converge en probabilidad (respectivamente, en distribución) a $aZ + b$.
Comprueba que si $X_n \to X$ e $Y_n \to Y$ en probabilidad, entonces $X_n + Y_n \to X + Y$ en probabilidad. ¿Ocurre lo mismo para la convergencia en distribución?

2. Sea $X_1, X_2, \ldots$ una sucesión de variables aleatorias independientes, todas con distribución uniforme en el intervalo $(0,1)$, y sea $Z_n = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$. Demuestra que

a) $Z_n \longrightarrow 1$ en probabilidad, cuando $n \to \infty$,

b) Si $U_n = n(1 - Z_n)$, entonces $\mathbf{P}(U_n \leq x) \longrightarrow \begin{cases} 1 - e^{-x}, & \text{si } x > 0\,, \\ 0, & \text{si } x \leq 0\,; \end{cases}$ de manera que U_n converge en distribución a una exponencial con parámetro 1.

3. Para cada n, sea X_n una binomial de parámetros n y p, con p fijo. Demuestra que X_n/n converge a p en probabilidad cuando $n \to \infty$.

4. Demuestra que si una sucesión de variables aleatorias X_n converge en distribución hacia una constante, entonces también converge en probabilidad.

5. Supongamos que $X_1, X_2, \ldots$ es una sucesión de variables aleatorias independientes (no suponemos que tienen la misma distribución). Llamemos $m_k = \mathbf{E}(X_k)$ y $\sigma_k^2 = \mathbf{V}(X_k)$. Supongamos que hay una constante R tal que $\sigma_k^2 < R$ y denotemos por

$$M_n = \frac{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}{n}\,.$$

Demuestra que, para cualquier ε,

$$\mathbf{P}\left(\left|\left(\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}\right) - M_n\right| < \varepsilon\right) \longrightarrow 1 \quad \text{cuando } n \to \infty.$$

Indicacin: utilizar la desigualdad de Chebyshev.

6. Sea Z una variable normal estándar. Calcula $\mathbf{E}(Z^2)$ y $\mathbf{E}(Z^4)$. Sea $Y = Z^2$. Halla la función de densidad de Y, su media y su varianza.

Sea ahora $Z_1, Z_2, \ldots$ una sucesión de variables aleatorias normales estándar independientes. Para cada natural n, definamos la variable S_n: $S_n = \sum_{i=1}^n Z_i^2$.

- Utiliza el teorema central del límite para comprobar que $\mathbf{P}\left(S_n \leq n + k\sqrt{(2n)}\right)$ converge a un cierto límite, para cada k fijo, cuando $n \to \infty$.
- Demuestra que, para todo c fijo, $\mathbf{P}(S_n \leq c)$ tiende a 0 cuando $n \to \infty$.

7. Sea S el número de caras que se obtienen al lanzar una moneda regular un millón de veces. Utiliza la desigualdad de Chebychev y el Teorema Central del Límite para estimar:

- la probabilidad de que S quede entre 499.500 y 500.500,
- la probabilidad de que S quede entre 498.000 y 502.000.

8. En una encuesta se supone que una proporción p (desconocida) de gente en una población están a favor de una determinada nueva ley y que, consecuentemente, una proporción $1-p$ están en contra. Se toma una muestra (elegidos independientemente unos de otros) de tamaño n. Utiliza el Teorema Central del Límite para determinar qué tamaño n debe tener la muestra para que la estimación (a partir de la muestra) de la proporción p tenga, con probabilidad de un 95 %, un error de a lo sumo 0,01.

9. Elegimos, de manera independiente, N números al azar en el intervalo $[0, 1]$ (al azar quiere decir con distribución uniforme, y N será muy grande). Ahora calculamos la media aritmética de los *cuadrados* de estos N números: ¿qué esperamos obtener?

Explica con detalle el sentido de tu respuesta, enunciando el resultado que la justifique.

10. Una ruleta tiene 64 casillas, etiquetadas con los números del 1 al 64. Las casillas de la 1 a la 16 están pintadas de rojo; las casillas de la 17 a la 40, de verde, y el resto de azul. Cada vez que la bola cae en una casilla roja, recibimos un premio de 3 euros; el premio es de 7 euros si cae en verde y de 5 si cae en azul.
Giramos la ruleta un número grande de veces, N, anotamos los premios conseguidos y calculamos su media aritmética. ¿Qué esperamos obtener? (Explica con detalle el sentido de tus respuestas, enunciando el resultado que las justifique).

11. Se ha observado que, por término medio, el hilo de un telar se rompe 375 veces por cada 1.000 horas de funcionamiento. Consideremos la v.a. X = número de roturas en 8 horas de funcionamiento.
a) Proponer un modelo de probabilidad para X indicando las hipótesis en que estaría basado.
b) Si el telar funciona anualmente 8 horas al día durante 192 días hábiles, calcular aproximadamente la probabilidad de que el número de roturas anuales supere las 500.

12. En una población muy grande se eligen n individuos al azar e independientemente y se observa si tienen Rh+ o Rh-.
a) Indicar cómo para n suficientemente grande podemos aproximar tanto como queramos el verdadero porcentaje de individuos con Rh+ en la población.
b)Para n = 4.000, calcular aproximadamente la probabilidad de que la proporción de Rh+ entre los n individuos difiera del verdadero porcentaje en la población en menos de un 5 %.
c) Calcular n para que la proporción de Rh+ en la muestra difiera del verdadero porcentaje en menos de un 1 % con probabilidad 0,99.

13. Sean $X_1, ..., X_n$ v.a. i.i.d. $U(0, 1)$ estudiar el comportamiento asintótico de la media geométrica de las n variables. Indicación: trasformar el producto en una suma de v.a. con valores positivos.
¿Qué se puede decir sobre la distribución exacta?

14. Sean $x_1, ..., x_n, ...$ una sucesión cualquiera de números reales, sean $y_1, ..., y_n, ...$ los mismos números redondeados al entero más cercano, es decir $y_i = x_i + Z_i$.
Podemos suponer que que $Z_1, ..., Z_n, ...$ son v.a. i.i.d $U(-1/2, 1/2)$.
a) Estudiar el comportamiento asintótico del error que cometeremos al estimar la suma de n de las x_i mediante la suma de las correspondientes y_i.
b) calcular aproximadamenta la probabilidad de que el error de redondeo en la suma de 100 números sea menor que 5.