

Economía y finanzas matemáticas
Cuarto curso, licenciatura en Matemáticas, UAM, 2011-2012

Hoja 4 (árboles binomiales y fórmula de Black-Scholes)

ÁRBOLES DE JARROW-RUDD

En los siguientes ejercicios, los datos de mercado serán S_0 (la cotización hoy del subyacente), R (el tipo anual, continuo) y σ (la volatilidad anual del subyacente). El modelo binomial (Jarrow-Rudd) tiene paso Δt y sus parámetros son: $p = 50\%$,

$$u = e^{R\Delta t} \frac{1}{\cosh(\sigma\sqrt{\Delta t})} e^{+\sigma\sqrt{\Delta t}}, \quad d = e^{R\Delta t} \frac{1}{\cosh(\sigma\sqrt{\Delta t})} e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}.$$

1. Obtén la *fórmula* de valoración de una opción que, a vencimiento $M\Delta t$, paga 1 si la cotización está por encima de S_0 , mientras que paga 0 si es igual o inferior.
2. Obtén la *fórmula* de valoración de una opción que, a vencimiento $M\Delta t$, paga 1 si la cotización está entre K y $2K$ (y paga 0 en el resto de los casos).
3. Digamos que $M = 2$ (un árbol con dos pasos). Obtén una *fórmula* para valorar una opción que paga, en tiempo $2\Delta t$, la cantidad

$$\left(\frac{S_0 + S_1 + S_2}{3} - S_0 \right)^+,$$

donde S_j es la cotización en tiempo $j\Delta t$ (una call sobre la media aritmética de las cotizaciones).

4. Supongamos que el subyacente paga una tasa Q continua de dividendos, y que esos dividendos se reinvierten en el subyacente. Es decir, si tenemos hoy una unidad del subyacente, tras tiempo Δt tendremos $e^{Q\Delta t}$ unidades de subyacente. Queremos reconstruir el modelo de JR adaptándonos a esta nueva situación.

a) Plantea el modelo binomial de un solo periodo, teniendo en cuenta que lo que hay que considerar son los dos posibles valores (en tiempo Δt) de tener hoy una unidad del subyacente (que cuesta S_0). Halla la condición que debe verificar la probabilidad de valoración.

b) Hecho esto, junto con la ecuación de la volatilidad (que es la habitual), halla los nuevos valores de los parámetros u y d .

FÓRMULAS DE BLACK-SCHOLES

5. Dados los valores de r (tipo anual continuo), σ y S (volatilidad y cotización del subyacente), K (strike) y $\tau = T - t$ (tiempo hasta vencimiento), la fórmula de valoración de Black-Scholes para la prima de la call en tiempo t viene dada por:

$$c = S \Phi(d_+) - K e^{-r\tau} \Phi(d_-), \quad \text{donde} \quad d_{\pm} = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} \ln \left(\frac{S}{K e^{-r\tau}} \right) \pm \frac{\sigma\sqrt{\tau}}{2}$$

y Φ denota la función de distribución de la normal estándar. Si tomamos $t = 0$ obtenemos la fórmula vista en clase.

- a) Comprueba que

$$\frac{\partial c}{\partial S} = \Phi(d_+).$$

(Nota: al derivar, ten en cuenta que $d_{\pm}$ depende también de los parámetros; por cierto, la derivada de la función de distribución Φ es la función de densidad de la normal estándar, que denotaremos por ϕ).

b) Las derivadas parciales de la prima con respecto a los parámetros reciben el nombre “griegas”. La del apartado a) es la “delta”. Calcula también las siguientes derivadas:

$$\frac{\partial c}{\partial \sigma} \text{ (vega); } \frac{\partial c}{\partial t} \text{ (theta); } \frac{\partial c}{\partial r} \text{ (rho);}$$

c) Comprueba si las cuatro derivadas parciales anteriores tienen signo e interprétalo financieramente.

d) Calcula también la “gamma”, es decir, $\frac{\partial^2 c}{\partial S^2}$, e interpreta su signo.

e) Repite los cálculos para la prima de la put, cuya fórmula es

$$p = K e^{-r\tau} \Phi(-d_-) - S \Phi(-d_+).$$

¿Coinciden algunas de las griegas de la put con las correspondientes de la call?

6. Digamos que

$$S = 100, \quad r = 5\%, \quad \sigma = 30\%, \quad T = 6 \text{ meses}, \quad K = 110.$$

Calcula el valor de la prima de la call, la put y el forward (con las fórmulas de Black-Scholes).

7. Si un derivado paga $g(S_T)$ a vencimiento T , la correspondiente fórmula de valoración (a la Black-Scholes) viene dada por

$$e^{-rT} \int_{-\infty}^{\infty} g(S_T) \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx, \quad \text{donde} \quad S_T = S_0 e^{(r-\sigma^2/2)T} e^{\sigma\sqrt{T}x}.$$

a) Halla una fórmula explícita para una “call binaria”, que paga 1 si, a vencimiento T , $S_T > K$, mientras que paga 0 si $S_T < K$. Y para la “put binaria”, que paga 0 y 1 justo al revés.

b) Comprueba que la habitual fórmula de la paridad call-put no se verifica. ¿Cuál será la fórmula de la “paridad call-put” para este caso binario?

c) Halla la fórmula para la prima de una opción que paga 1 si S_T está entre K y $2K$ (y 0 en el resto de los casos).

EJERCICIO ANTICIPADO Y OPCIONES AMERICANAS

8. Vamos a recibir tres ofertas, F_3, F_2, F_1 , de forma consecutiva. La primera en llegar es F_3 . Digamos que las ofertas son variables aleatorias i.i.d. que siguen una distribución dada por la siguiente función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} 1/3 & \text{si } 0 < x < 1; \\ 2/3 & \text{si } 1 < x < 2; \end{cases}$$

Imponemos la cláusula habitual de que si no se acepta una oferta en el momento en que llega, se “pierde”. Calcula el valor a partir del cual debemos aceptar la primera oferta, F_3 .

9. Comprueba que, si el subyacente paga dividendos antes de la fecha de vencimiento de la opción, una call americana vale más que la correspondiente call europea (pista: escribe y usa la paridad call-put para el caso de un subyacente que paga dividendos).

EJERCICIO COMPUTACIONAL

10. Monta en excel el árbol de evolución para los valores del subyacente y el código para valorar opciones europeas y opciones americanas cualesquiera. Calcula también las correspondientes carteras de cobertura.