Conjuntos y Números

Curso 2002-2003

Hoja 4

Números enteros

1. Demostrar que la suma y el producto en $\mathbb{Z}$ tienen las propiedades: para la suma,

(a) **asociativa:** $\big([(a,b)]+[(c,d)]\big)+[(e,f)]=[(a,b)]+\big([(c,d)]+[(e,f)]\big)$.

(b) **conmutativa:** $[(a,b)]+[(c,d)]=[(c,d)]+[(a,b)]$.

(c) La clase $[(0,0)]$ es el **elemento neutro**:

$$[(a,b)]+[(0,0)]=[(0,0)]+[(a,b)]=[(a,b)].$$

(d) La clase $[(b,a)]$ es el **elemento opuesto** de $[(a,b)]$. Es decir,

$$[(b,a)]+[(a,b)]=[(a,b)]+[(b,a)]=[(0,0)]\,.$$

Y para el producto,

(a) **asociativa**.

(b) **conmutativa**.

(c) La clase $[(1,0)]$ es el **elemento neutro**:

$$[(1,0)]\times[(a,b)]=[(a,b)]\times[(1,0)]=[(a,b)]\,.$$

Comprobar, finalmente, que el producto es **distributivo** respecto de la suma:

$$[(a,b)]\times([(c,d)]+[(e,f)])=[(a,b)]\times[(c,d)]+[(a,b)]\times[(e,f)]\,.$$

2. ¿Cuál es el resto de la división de 1324^{1000} entre 17?

3. Demostrar la fórmula de Gauss:

$$\sum_{d|n}\varphi(d)=n\,.$$

4. Hallar todas las soluciones de la ecuación $60\,x\equiv 24 \bmod(48)$.

5. Hallar el resto de dividir entre 13 el número

$$999\,998\,997\,\ldots\ldots\,003\,002\,001\,000\,.$$

6. Decidir si es múltiplo de 3 el número n cuya expresión en base 2 es

$$10010100111010100010100111\,.$$

7. D. José estudió en un colegio que tenía entre 150 y 300 alumnos. aunque no se acuerda del número exacto de ellos, sí se queja de no haber podido practicar el fútbol, el balonmano ni el baloncesto porque, cuando en cada deporte intentaban organizar el colegio en equipos, siempre faltaba o sobraba uno. ¿Cuántos colegiales había?

8. Probar el recíproco del teorema de Wilson: "si $(n-1)!+1 \equiv 0 \bmod(n)$, entonces n es primo".

9. Probar que todo número de la forma $4n^2+1$ es producto de primos de la forma $4m+1$.

10. Demostrar que si $a^h \equiv 1 \bmod(n)$ para todo a con m.c.d.$(a,n)=1$, entonces $h \mid \varphi(n)$.

11. Hallar todos los p tales que p, $p+4$, $p+6$, $p+10$, $p+12$, $p+16$ y $p+22$ sean primos simultáneamente.

12. Hallar todas las soluciones de la congruencia

$$x^3+2x^2-x+6 \equiv 0 \bmod(14)\,.$$

13. Resolver las siguientes congruencias:

i) $243x+17 \equiv 103 \bmod(125)$;

ii) $6x+3 \equiv 4 \bmod(10)$;

iii) $2x \equiv 16 \bmod(14)$.

14. Resolver las congruencias simultáneas:

$$\begin{cases} x \equiv 3 \bmod(5)\,, \\ 5x \equiv 7 \bmod(8)\,. \end{cases}$$

15. En una isla desierta, cinco hombres y un mono recogen cocos durante todo el día, y después se duermen. El primer hombre se despierta y decide tomar su parte. Divide los cocos en cinco grupos iguales y le sobra un coco que le da al mono. Después toma su parte y vuelve a dormirse. Entonces despierta el segundo, y haciendo un montón con los cocos que quedaron, lo divide en cinco partes iguales, y le sobra un coco, que da al mono. Sucesivamente ocurre lo mismo con cada uno de los tres hombres restantes. Se pide encontrar el número mínimo de cocos que formaban el montón original.

16. Escribir las tablas de sumar y de multiplicar en $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_6$ y $\mathbb{Z}_7$.