CÁLCULO 1 Curso 2010-2011

PRIMERO CURSO, GRADO EN MATEMÁTICAS (GRUPO 715)

Hoja 4: Continuidad de funciones

1.- Dibuja la gráfica y estudia la continuidad de las siguientes funciones. El símbolo $[x]$ denota la parte entera de x, es decir, el mayor entero menor o igual que x:

(a) $f(x) = [x]$ (b) $f(x) = x - [x]$ (c) $f(x) = \sqrt{x - [x]}$

(d) $f(x) = [x] + \sqrt{x - [x]}$ (e) $f(x) = \left[\dfrac{1}{x}\right]$ (f) $f(x) = \dfrac{1}{[\frac{1}{x}]}$

2.- Estudia los puntos de discontinuidad y establece en su caso el tipo de la misma para las siguientes funciones:

$$f_1(x) = \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}, \qquad f_2(x) = \frac{b}{x - b}, \qquad f_3(x) = x\left[\frac{1}{x}\right], \qquad f_4(x) = [\operatorname{sen} x].$$

$$f_5(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \in [a-1, a), \\ x + a & \text{si} \quad x \in [a, a+1]. \end{cases} \qquad f_6(x) = \begin{cases} -|\operatorname{sen} x| - 4 & \text{si} \quad x < \pi, \\ |\cos x| - 5 & \text{si} \quad x \geq \pi. \end{cases}$$

3.- Se consideran las funciones $f(x) = x^2$, $g(x) = e^x$, $h(x) = \cos x$.

a) Escribe la expresión analítica de las funciones $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ h + h \circ g$ y $f \circ g \circ h$.

b) Escribe en términos de operaciones con las funciones f, g y h las funciones siguientes:

$$e^{\cos x}, \quad \cos(e^x + e^{x^2}), \quad e^{2x}.$$

4.- Prueba que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua en a, entonces $|f|$ también lo es. Da un ejemplo de función discontinua cuyo valor absoluto sea una función continua.

5.- Da un ejemplo de función definida sobre todos los reales que sólo sea continua en los puntos 0 y 1.

6.- Supóngase que f y g son funciones continuas en $[a, b]$ y que $f(a) < g(a)$, pero $f(b) > g(b)$. Demostrar que $f(x) = g(x)$ para algún x en (a, b).

7.- Demostrar que las siguientes ecuaciones tienen solución:

$$(a) \quad x - \operatorname{sen} x - 5 = 0, \qquad (b)(*) \quad x^7 + \frac{213}{2 + x^2 + \tan^2 x} = 12, \qquad (c)(*) \quad \frac{x}{4} = x - [x].$$

8.- a) Estudiar la continuidad de la función $f(x) = \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$.

b) (*) Demostrar que $f(x)$ satisface la conclusión del teorema de los valores intermedios en el intervalo $[-1, 1]$.

9.- Suponiendo que la temperatura varía continuamente, prueba que hay dos puntos antipodales en el ecuador terrestre con la misma temperatura.