Probabilidad 1
Segundo de Matemáticas
Curso 2002-2003

Hoja 3

1. Se sacan dos cartas "al azar"de un mazo de 40 cartas. Denotamos por X el número de ases que se obtienen e Y el número de reyes. Calcular la función de densidad conjunta de X e Y.

2. Sean X e Y dos variables aleatorias discretas para las que la función de masa conjunta $p_{X,Y}(a,b)$ es un producto de una función de a por una función de b:

$$p_{X,Y}(a,b) = f(a)\, g(b)\,.$$

Demostrar que X e Y son independientes.

3. Un par de variables aleatorias discretas X e Y tiene función de densidad conjunta (para un cierto valor del parámetro θ)

$$\mathbf{P}(X=i, Y=j) = \begin{cases} \theta^{i+j+1}, & \text{para } i,j = 0,1,2\,; \\ 0, & \text{para los demás valores de } i,j, \end{cases}$$

i) Demuéstrese que θ satisface la ecuación $\theta + 2\theta^2 + 3\theta^3 + 2\theta^4 + \theta^5 = 1$.

ii) Hállense las funciones de densidad marginales de X y de Y.

iii) Demuéstrese que $\mathbf{E}(XY) = \theta^3 + 4\theta^4 + 4\theta^5$ y que $\mathbf{E}(X) = \theta^2 + 3\theta^3 + 3\theta^4 + 2\theta^5$.

4. Dar un ejemplo de dos variables aleatorias discretas X e Y que cumplen que $\mathbf{E}(XY) = \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)$, pero que **no** sean independientes.

Sin embargo, probar que si X e Y toman sólo dos valores, entonces X e Y son independientes si y sólo si $\mathbf{E}(XY) = \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)$.

5. La función de masa conjunta de dos variables X e Y, que toman valores en $\{-1,0,1\}$ viene dada por la siguiente matriz:

	$X=-1$	$X=0$	$X=1$
$Y=-1$	$3/32$	$5/32$	$3/32$
$Y=0$	$5/32$	$8/32$	$3/32$
$Y=1$	$1/32$	$3/32$	$1/32$

Comprobar que X e Y son dependientes y que, sin embargo, X^2 e Y^2 son independientes.

6. Si X e Y son dos variables aleatorias, definimos su **covarianza** como

$$\operatorname{cov}(X,Y) = \mathbf{E}\Big((X - \mathbf{E}(X))\,(Y - \mathbf{E}(Y)) \Big)\,.$$

Demostrar que

i) $\mathbf{E}(XY) = \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y) + \operatorname{cov}(X,Y)$.

ii) $\mathbf{V}(X+Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y) + 2\operatorname{cov}(X,Y)$.

iii) $\operatorname{cov}(aX+b, cY+d) = ac\operatorname{cov}(X,Y)$.

7. A veces es mejor manejar una versión de la covarianza que no tenga dimensiones: el **coeficiente de correlación** de X e Y se define como

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathbf{V}(X)\mathbf{V}(Y)}}\,.$$

Demostrar que

i) $-1 \leq \rho(X,Y) \leq 1$ (*Sugerencia*: desigualdad de Cauchy-Schwarz).

ii) $|\rho(X,Y)| = 1$ si y sólo si $\mathbf{P}(X = aY + b) = 1$ para ciertas constantes a y b.

iii) Si X e Y son independientes, entonces $\rho(X,Y) = 0$. Pero no al revés, en general. Esto es, puede que X e Y sean **incorreladas** ($\rho(X,Y) = 0$) y, sin embargo, no ser independientes (como sugiere el ejercicio 4).

iv) $\rho(aX + b, cY + d) = \mathrm{signo}(ac)\,\rho(X,Y)$.

8. X e Y con variables aleatorias independientes. ¿Podemos deducir que que $X+Y$ y $X-Y$ son también independientes?

9. X e Y con variables aleatorias con la misma varianza, σ^2. ¿Qué podemos decir sobre la correlación de $X+Y$ y $X-Y$?

10. Sea $X_1, X_2, \dots$ una sucesión de variable aleatorias incorreladas, todas ellas con varianza σ^2. Definimos, para cada $n \geq 1$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Comprobar que

$$\mathbf{V}(S_n) = n\,\sigma^2 \quad \text{y que} \quad \mathrm{cov}(S_n, S_m) = \min(n,m)\,\sigma^2\,.$$

11. Sean X e Y variables aleatorias discretas independientes que siguen distribuciones de Poisson, con parámetros respectivos λ y μ. Demuéstrese que $X+Y$ es también una variable de Poisson con parámetro $\lambda+\mu$. Dése un ejemplo para comprobar que la conclusión **no** es cierta si X e Y no son independientes.

12. Sean X e Y variables aleatorias discretas independientes que siguen distribuciones binomiales con parámetros respectivos (n,p) y (m,p). Demostrar que $X+Y$ es también una variable binomial (con parámetros $(n+m,p)$).

13. Sea $X_1, X_2, \dots$ una sucesión de variables aleatorias discretas todas con media μ. Sea además N una variable aleatoria independiente de todas las X's, y que toma valores en $\{1,2,3,\dots\}$. Demostrar, condicionando sobre los valores de N, que

$$\mathbf{E}(X_1 + X_2 + \cdots + X_N) = \mu \cdot \mathbf{E}(N)$$

14. Sea X e Y variables aleatorias discretas independientes con función de densidad

$$\mathbf{P}(X = k) = \mathbf{P}(Y = k) = p \cdot q^k, \qquad \text{para } k = 0,1,2,\dots$$

donde $0 < p = 1 - q < 1$. Demuéstrese que

$$\mathbf{P}(X = k | X + Y = n) = \frac{1}{n+1}, \qquad \text{para } k = 0,1,2,\dots,n$$

15. Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variables aleatorias discretas independientes, todas con distribución

$$\mathbf{P}(X_i = k) = \frac{1}{N}, \qquad \text{para } k = 1, 2, \ldots, N\,.$$

Hállense las funciones de densidad de las variables U_n y V_n dadas por

$$U_n = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\} \quad \text{y} \quad V_n = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}\,.$$

16. Sean X e Y variables aleatorias discretas independientes ambas con distribución geométrica de parámetros respectivos p y r. Demuéstrese que la variable $U = \min\{X, Y\}$ sigue una distribución geométrica con parámetro $p + r - pr$.

17. Tenemos una moneda en la que cara aparece con una probabilidad p. Lanzamos la moneda un número aleatorio N de veces, donde N tiene una distribución de Poisson con parámetro λ y es independiente de los resultados de los lanzamientos. Denotamos por X la variable que cuenta el número de caras y por Y la que cuenta el número de cruces.

Demuéstrese que X e Y son variables de Poisson **independientes** con parámetros respectivos λp y $\lambda(1-p)$.

18. Distribuimos "al azar" N bolas en M cajas (pueden caer varias bolas en una caja). Demuéstrese que el número medio de cajas que quedan vacías es:

$$\frac{(M-1)^N}{M^{(N-1)}}$$

(*Sugerencia:* condicionar sobre el número de bolas que caen en la primera caja, y aplicar inducción.)

19. Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias incorreladas; todas ellas tienen media μ y varianza σ^2. Definimos la variable aleatoria

$$\overline{X} = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)\,.$$

Comprobar que

$$\mathbf{E}\left(\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2\right) = \sigma^2\,.$$

20. X es una variable aleatoria con $val(X) = \{0, 1, 2, \ldots\}$ y función generatriz de probabilidad $G_X(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(X = n)s^n$. Comprobar que, si $0 < s < 1$,

$$G_X(s) = \mathbf{E}(s^X)\,.$$

Con esta observación, probar (de nuevo) que si X e Y son variables aleatorias independientes con funciones generatrices de probabilidad $G_X(s)$ y $G_Y(s)$, respectivamente, entonces

$$G_{X+Y}(s) = G_X(s)G_Y(s)\,.$$

21. Sea X una variable aleatoria con valores en $\{0, 1, 2, \ldots$ y función generatriz de probabilidad $G_X(s)$. Definimos la función

$$H(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(X > n)\, s^n\,.$$

Obsérvese que no tiene por qué ser una función generatriz de probabilidad: sus coeficientes no suman necesariamente 1 (pregunta: ¿cuánto suman?). Comprobar que

$$(1-s)H(s) = 1 - G_X(s)\,.$$