Geometría II
Segundo de Matemáticas
Curso 2004-2005

Hoja 3 (Superficies y segunda forma fundamental)

1. Hallar la segunda forma fundamental del paraboloide $z = x^2+y^2$ con respecto a la parametrización $\mathbb{X}(u,\theta) = (u\cos(\theta), u\sin(\theta), u^2)$;

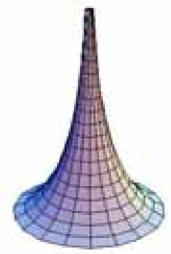
2. Hallar las curvaturas y direcciones principales (a) en los vértices del hiperboloide de dos hojas $x^2 - y^2 - z^2 = 1$; (b) en el punto (1,1,1) del grafo $z = xy$.

3. Verificar que si la segunda forma fundamental del grafo de una función f es idénticamente nula, entonces el grafo está contenido en un plano.

4. La INDICATRIZ DE DUPIN es el conjunto de direcciones del plano tangente en las que la segunda forma fundamental vale 1 (ó -1; recuérdese que el signo de la segunda forma fundamental depende de la elección del normal). Esto es, el conjunto $\{\mathbf{w} \in T_{\mathbf{p}}S : \mathrm{II}_p(\mathbf{w}) = \pm 1\}$. Describir geométricamente la indicatriz de Dupin cuando $\mathbf{p}$ es un punto elíptico, parabólico, planar o hiperbólico.

5. Una superficie con $K \equiv -1$: la PSEUDOOESFERA. Consideremos la curva tractriz (de la que ya hablamos en el ejercicio 29 de la Hoja 1), que podemos parametrizar como

$$\boldsymbol{\alpha}(t) = (\operatorname{sech}(t), t - \tanh(t)), \qquad t > 0$$



Consideremos la curva anterior situada en el plano (y,z). Al rotarla en torno al eje z, obtenemos la superficie conocida como *seudoesfera*, cuyo aspecto puedes apreciar en el dibujo de la derecha. Parametriza la superficie, halla los coeficientes de la primera y segunda formas fundamentales y comprueba, finalmente, que $K = -1$ en todos sus puntos.

6. Verificar que las superficies regladas desarrollables (véase el ejercicio 6 de la Hoja 2) tienen curvatura gaussiana idénticamente nula.

7. Verifíquese que siempre se cumple que $H^2 \geq K$. Y que los puntos umbilicales se caracterizan por cumplir que $H^2 = K$.

8. Sea S una superficie y $\mathbf{p}$ un punto suyo.
(a) Sea $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ una base de $T_{\mathbf{p}}S$ (no necesariamente ortonormal). Compruébese que

$$(a) \quad \mathcal{F}_{\mathbf{p}}(\mathbf{u}_1) \times \mathcal{F}_{\mathbf{p}}(\mathbf{u}_2) = K\,\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2\,; \qquad (b) \quad \mathcal{F}_{\mathbf{p}}(\mathbf{u}_1) \times \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_1 \times \mathcal{F}_{\mathbf{p}}(\mathbf{u}_2) = 2H\,\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2\,,$$

donde K es la curvatura gaussiana y H es la curvatura media.
(b) Supongamos ahora que $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ es una base ortonormal de $T_{\mathbf{p}}S$. ¿Qué información geométrica se deduce de

$$\begin{array}{llll} (b1) & <\mathcal{F}_{\mathbf{p}}(\mathbf{u}_1), \mathbf{u}_2>= 0; & (b2) & \mathcal{F}_{\mathbf{p}}(\mathbf{u}_1) \times \mathcal{F}_{\mathbf{p}}(\mathbf{u}_2) = \mathbf{0}; \\ (b3) & \mathcal{F}_{\mathbf{p}}(\mathbf{u}_1) + \mathcal{F}_{\mathbf{p}}(\mathbf{u}_2) = \mathbf{0}; & (b4) & <\mathcal{F}_{\mathbf{p}}(\mathbf{u}_1), \mathcal{F}_{\mathbf{p}}(\mathbf{u}_2)>= 0\ ? \end{array}$$

9. Sea $\mathcal{F}_{\mathbf{p}}$ el operador de forma de una superficie S en un punto $\mathbf{p}$. Compruébese que, si $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_{\mathbf{p}}S$,

$$<\mathcal{F}(\mathbf{v}), \mathcal{F}(\mathbf{w})>= 2H\ <\mathcal{F}(\mathbf{v}), \mathbf{w}> -K <\mathbf{v}, \mathbf{w}>\ .$$

10. Compruébese que si $\mathbf{p}$ es un punto no planar con $H = 0$, entonces $\mathbf{p}$ es hiperbólico. Verifíquese que las direcciones asintóticas son perpendiculares.

11. Verifíquese que la dirección $\mathbf{w} = a\mathbb{X}_u + b\mathbb{X}_v$ es principal si y sólo si

$$\begin{vmatrix} b^2 & -ab & a^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0\,. \qquad (\textit{Ayuda}\text{: } \mathbf{w} \text{ es principal si y sólo si } \mathcal{F}(\mathbf{w}) \times \mathbf{w} = \mathbf{0}.)$$

12. Sea $k(\theta)$ la curvatura normal en un punto $\mathbf{p}$ en la dirección que forma ángulo θ con una dirección fija. Verifíquese que

$$(a) \quad H = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} k(\theta)d\theta; \qquad b) \quad H = \frac{k(\theta)+k(\theta+\pi/2)}{2} \qquad \text{para todo } \theta \in [0,2\pi].$$

13. Verificar que todos los puntos de la superficie $x+y=z^3$ son parabólicos o planares.

14. Supongamos que dos superficies S_1 y S_2 se intersecan en una curva regular $\boldsymbol{\alpha}$ formando ángulo $\theta(\mathbf{p})$, para cada $\mathbf{p} \in \boldsymbol{\alpha}$. Supongamos que $\boldsymbol{\alpha}$ es línea de curvatura de S_1. Compruébese que también es línea de curvatura de S_2 si y sólo si el ángulo $\theta(\mathbf{p})$ es constante.

15. Determinar las líneas asintóticas de la catenoide $\mathbb{X}(u,\theta) = (\cos(\theta)\cosh(u), \sin(\theta)\cosh(u), u)$.

16. Determinar las curvas asintóticas y las líneas de curvatura de la superficie $z = xy$.

17. Demostrar que las curvas coordenadas son (a) líneas de curvatura si y sólo si $F = f = 0$; (b) líneas asintóticas si y sólo si $e = g = 0$.

18. Superficies paralelas. Sea S una parametrización y $\mathbb{X}(u,v)$ una parametrización (local) suya. Sea a un número (pequeño). Consideremos

$$\overline{\mathbb{X}}(u,v) = \mathbb{X}(u,v) + a\,\mathbf{N}(\mathbb{X}(u,v))\,.$$

Supongamos que $\overline{\mathbb{X}}(u,v)$ es carta de una superficie $\overline{S}$ (que se dice *paralela* a S). Verifíquese que

i) $\overline{\mathbb{X}}_u = \mathbb{X}_u - a\mathcal{F}(\mathbb{X}_u)$ y que $\overline{\mathbb{X}}_v = \mathbb{X}_v - a\mathcal{F}(\mathbb{X}_v)$;

ii) $\overline{\mathbb{X}}_u \times \overline{\mathbb{X}}_v = J\,\mathbb{X}_u \times \mathbb{X}_v$, donde $J = 1 - 2aH + a^2K$ (en particular, $\overline{\mathbf{N}} \cdot \overline{\mathbb{X}} = \mathbf{N} \cdot \mathbb{X} + a$).

iii) $\overline{\mathcal{F}}(\overline{\mathbb{X}}_u) = \mathcal{F}(\mathbb{X}_u)$ y $\overline{\mathcal{F}}(\overline{\mathbb{X}_v}) = \mathcal{F}(\mathbb{X}_v)$;

iv) $\overline{K} = \dfrac{K}{J}$ y $\overline{H} = \dfrac{H - aK}{J}$.

19. Verificar que si una superficie S y un plano P son tangentes a lo largo de una curva, entonces los puntos de esa curva son parabólicos o planares.

20. Supongamos que una línea de curvatura $\boldsymbol{\alpha}$, que nunca es tangente a una dirección asintótica, es tal que su plano osculador y el plano tangente a la superficie forman ángulo constante. Verifíquese que $\boldsymbol{\alpha}$ es plana.

21. Sea $\boldsymbol{\alpha}$ una curva birregular (parametrizada por longitud de arco) contenida en una superficie S. Sean $\kappa_{\boldsymbol{\alpha}} > 0$, $\tau_{\boldsymbol{\alpha}}$ y $\{\mathbf{t}_{\boldsymbol{\alpha}}, \mathbf{n}_{\boldsymbol{\alpha}}, \mathbf{b}_{\boldsymbol{\alpha}}\}$ la curvatura, la torsión y el triedro de Frenet en cada punto de $\boldsymbol{\alpha}$. Consideremos también el triedro de Darboux $\{\mathbf{t}_{\boldsymbol{\alpha}}, \mathbf{N}, \mathbf{C}\}$ y la curvatura normal k_n, la curvatura geodésica κ_g y la torsión geodésica τ_g.

a) Utilícese el ejercicio 9 de esta misma hoja para comprobar que $k_n^2 + \tau_g^2 = 2Hk_n - K$.

b) Compruébese que

$$\kappa_{\boldsymbol{\alpha}} = \sqrt{k_n^2 + \kappa_g^2} \qquad \text{y} \qquad \tau_{\boldsymbol{\alpha}} = \frac{k_n'\,\kappa_g + k_n\,\kappa_g'}{k_n^2 + \kappa_g^2} + \tau_g\,.$$

Obsérvese que si $\boldsymbol{\alpha}$ es curva asintótica ($k_n = 0$), entonces $\kappa_{\boldsymbol{\alpha}} = |\kappa_g|$ y $\tau_{\boldsymbol{\alpha}} = \tau_g$. Y que si $\boldsymbol{\alpha}$ es curva geodésica ($\kappa_g = 0$), entonces $\kappa_{\boldsymbol{\alpha}} = |k_n|$ y $\tau_{\boldsymbol{\alpha}} = \tau_g$.

c) Pruébese que, si $\boldsymbol{\alpha}$ es curva asintótica, entonces $K = -\tau_{\boldsymbol{\alpha}}^2$ en los puntos de $\boldsymbol{\alpha}$.

iii) Verifíquese que, en la parametrización $\mathbb{X}(u,\theta) = (u\cos(\theta), u\sin(\theta), \theta)$ del helicoide, las curvas coordenadas son asintóticas. Utilícese el apartado anterior para calcular la curvatura gaussiana del helicoide.

22. Sea $\boldsymbol{\alpha}$ una curva parametrizada por longitud de arco en una superficie S. Supongamos que $\boldsymbol{\alpha}$ es línea de curvatura. Verificar que

a) $\boldsymbol{\alpha}$ es asintótica si y sólo si $\boldsymbol{\alpha}$ está contenida en un plano que es siempre tangente a S.

b) $\boldsymbol{\alpha}$ es geodésica si y sólo si $\boldsymbol{\alpha}$ está contenida en un plano que es siempre ortogonal a S.