

**Matemática Discreta**  
**Segundo de Ingeniería Informática UAM**  
**Curso 2005-2006**

**Hoja 3 (Combinatoria)**

1. Calcula el número de particiones de 15 elementos en 5 grupos de 1, 2, 3, 4 y 5 elementos, respectivamente.
2. Calcula el número de particiones del conjunto  $\{A, B, C, D, E\}$  tales que:
  - a)  $A$  y  $B$  están en la misma parte;
  - b)  $A$  y  $B$  están en distintas partes.
3. Calcúlese el número de maneras de repartir  $n$  libros en  $k$  cajas de tal manera que todas las cajas tengan algún libro si:
  - a) los libros son distintos y las cajas iguales;
  - b) los libros son iguales y las cajas distintas.
4. Sea  $n$  un entero positivo que es producto de  $m$  primos diferentes. ¿De cuántas maneras podemos escribir  $n$  como producto de  $k$  enteros de la forma

$$n = n_1 \times \cdots \times n_k, \quad (\text{con } 1 < n_1 < \cdots < n_k) ?$$

5. Calcula el número de particiones de un conjunto de 5 elementos que tenga:
  - a) cualquier cantidad de partes;
  - b) como mucho tres partes no vacías;
  - c) al menos 3 partes no vacías.
6. Calcula el número de distribuciones de 5 bolas distintas en 2 cajas rojas y 1 caja azul si no puede quedar ninguna caja vacía.
7. Calcula el número de maneras de distribuir 11 bolas idénticas en 3 cajas idénticas con al menos 2 bolas en cada caja.
8. Calcula el número de particiones del número 11 teniendo exactamente 3 partes, todas ellas mayores o iguales que 2.
9. Calcula el número de particiones de 8 que tengan:
  - a) cualquier número de partes positivas;
  - b) como mucho 3 partes positivas;
  - c) al menos 3 partes positivas;

**10.** Calcula el número total de particiones de 12 en sumandos positivos que tienen todos sus sumandos distintos.

**11.** Compruébese que

$$S(n, n - 1) = \binom{n}{2}$$

y que

$$S(n, n - 2) = \binom{n}{3} + \frac{1}{2} \binom{n}{2} \binom{n - 2}{2}.$$

Hállese una fórmula análoga para  $S(n, n - 3)$ .

**12.** Compruébese que

$$S(n, 2) = \frac{2^n - 2}{2}.$$

Obténgase una fórmula análoga para  $S(n, 3)$ .

**13.** Pruébese la identidad siguiente:

$$S(n + 1, m + 1) = \sum_{k=m}^n \binom{n}{k} S(k, m) \quad (\text{si } m \geq 1).$$

(*Sugerencia: constrúyase primero el bloque que contiene a  $n + 1$ .*)

**14.** Llámemos  $B_n$ , el  $n$ -ésimo número de Bell, al número total de particiones del conjunto  $\{1, \dots, n\}$ . Esto es,

$$B_n = \sum_{k=1}^n S(n, k).$$

Pruébese que

$$B_{n+1} = 1 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} B_k.$$