

Matemática Discreta
Segundo de Ingeniería Informática UAM
Curso 2005-2006

Hoja 3 (Combinatoria)

1. Calcula el número de particiones de 15 elementos en 5 grupos de 1, 2, 3, 4 y 5 elementos, respectivamente.
2. Calcula el número de particiones del conjunto $\{A, B, C, D, E\}$ tales que:
 - a) A y B están en la misma parte;
 - b) A y B están en distintas partes.
3. Calcúlese el número de maneras de repartir n libros en k cajas de tal manera que todas las cajas tengan algún libro si:
 - a) los libros son distintos y las cajas iguales;
 - b) los libros son iguales y las cajas distintas.
4. Sea n un entero positivo que es producto de m primos diferentes. ¿De cuántas maneras podemos escribir n como producto de k enteros de la forma

$$n = n_1 \times \cdots \times n_k, \quad (\text{con } 1 < n_1 < \cdots < n_k) \text{ ?}$$

5. Calcula el número de particiones de un conjunto de 5 elementos que tenga:
 - a) cualquier cantidad de partes;
 - b) como mucho tres partes no vacías;
 - c) al menos 3 partes no vacías.
6. Calcula el número de distribuciones de 5 bolas distintas en 2 cajas rojas y 1 caja azul si no puede quedar ninguna caja vacía.
7. Calcula el número de maneras de distribuir 11 bolas idénticas en 3 cajas idénticas con al menos 2 bolas en cada caja.
8. Calcula el número de particiones del número 11 teniendo exactamente 3 partes, todas ellas mayores o iguales que 2.
9. Calcula el número de particiones de 8 que tengan:
 - a) cualquier número de partes positivas;
 - b) como mucho 3 partes positivas;
 - c) al menos 3 partes positivas;

10. Calcula el número total de particiones de 12 en sumandos positivos que tienen todos sus sumandos distintos.

11. Compruébese que

$$S(n, n-1) = \binom{n}{2}$$

y que

$$S(n, n-2) = \binom{n}{3} + \frac{1}{2} \binom{n}{2} \binom{n-2}{2}.$$

Hállese una fórmula análoga para $S(n, n-3)$.

12. Compruébese que

$$S(n, 2) = \frac{2^n - 2}{2}.$$

Obtégase una fórmula análoga para $S(n, 3)$.

13. Pruébese la identidad siguiente:

$$S(n+1, m+1) = \sum_{k=m}^n \binom{n}{k} S(k, m) \quad (\text{si } m \geq 1).$$

(Sugerencia: constrúyase primero el bloque que contiene a $n+1$.)

14. Llamemos B_n , el n -ésimo número de Bell, al número total de particiones del conjunto $\{1, \dots, n\}$. Esto es,

$$B_n = \sum_{k=1}^n S(n, k).$$

Pruébese que

$$B_{n+1} = 1 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} B_k.$$