Matemática Discreta
Tercero de Matemáticas, UAM
Curso 2009-2010

Hoja 3

1. Encuentra fórmulas explícitas para los términos de las sucesiones definidas por:

$$\begin{array}{llll} (a) & u_0 = 0, u_1 = 1, & u_n = 5u_{n-1} - 6u_{n-2}, & n \geq 2; \\ (b) & u_0 = 1, u_1 = 3, & u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n, & n \geq 0. \end{array}$$

2. Resuélvanse las siguientes relaciones de recurrencia:

$$\begin{array}{lll} (a) & u_{n+1} - u_n = 3n^2 - n & \text{para } n \geq 0, \text{ con } u_0 = 3; \\ (b) & u_{n+1} - 2u_n = 2^n & \text{para } n \geq 0, \text{ con } u_0 = 1; \\ (c) & u_{n+2} + 4u_{n+1} + 4u_n = 7 + n + n^2 & \text{para } n \geq 0, \text{ con } u_0 = 0 \text{ y } u_1 = 2; \\ (d) & u_{n+2} - 6u_{n+1} + 9u_n = 3 \times 2^n + 7 \times 3^n & \text{para } n \geq 0, \text{ con } u_0 = 0 \text{ y } u_1 = 4. \end{array}$$

3. Nos regalan tres sellos y decidimos iniciar una colección. El año siguiente la incrementamos con 8 sellos más. Si cada año compramos un número de sellos igual al doble de los que compramos el año anterior, ¿al cabo de cuántos años habremos superado el millón de sellos?

4. Sea $M = \{A, B, C\}$ y sea S_n el número de n-listas formadas con las letras de M que tienen las Aes en bloques de longitud par. Encuentra una regla de recurrencia para S_n y resuélvela.

5. (a) Encuentra la relación de recurrencia correspondiente al número de listas binarias de longitud n que no tienen unos consecutivos y halla una expresión explícita para dichas cantidades. (b) ¿Y en el caso de listas ternarias?

6. Hállense las funciones generatrices de las sucesiones siguientes:

$$\begin{array}{llll} (a) & \left(\binom{8}{0}, \binom{8}{1}, \ldots, \binom{8}{8}, 0, 0, \ldots\right) & (b) & \left(0, \binom{8}{1}, 2\binom{8}{2}, \ldots, 8\binom{8}{8}, 0, 0, \ldots\right) \\ (c) & (1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots) & (d) & (0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, \ldots) \\ (e) & (1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots) & & \end{array}$$

7. Determínese la sucesión generada por cada una de las siguientes funciones generatrices:

$$\begin{array}{llll} a) & f(x) = (2x-3)^3 & b) & f(x) = \dfrac{x^4}{1-x} \\ c) & f(x) = \dfrac{x^3}{1-x^2} & d) & f(x) = \dfrac{1}{1+3x} \\ e) & f(x) = \dfrac{1}{1-x} + 3x^7 - 11 & f) & f(x) = \dfrac{1+3x-x^2+3x^3-x^4}{1-3x+3x^2-x^3}. \end{array}$$

8. Comprueba que

a) $$\begin{array}{c} X \text{ es } \textsc{binomial}(n,p) \\ \mathbf{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},\ k = 0, 1, \ldots, n \end{array} \longrightarrow \begin{cases} G_X(s) = \big[(1-p) + ps\big]^n \\ \mathbf{E}(X) = np\,,\ \mathbf{V}(X) = np(1-p) \end{cases}$$

b) $$\begin{array}{c} X \text{ es } \textsc{geométrica}(p) \\ \mathbf{P}(X=k) = p(1-p)^{k-1},\ k = 1, 2, 3, \ldots \end{array} \longrightarrow \begin{cases} G_X(s) = \frac{ps}{1-(1-p)s} \\ \mathbf{E}(X) = \frac{1}{p}\,,\ \mathbf{V}(X) = \frac{1-p}{p^2} \end{cases}$$

b) $$\begin{array}{c} X \text{ es } \textsc{poisson}(\lambda) \\ \mathbf{P}(X=k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!},\ k = 0, 1, 2, \ldots \end{array} \longrightarrow \begin{cases} G_X(s) = e^{\lambda(s-1)} \\ \mathbf{E}(X) = \lambda\,,\ \mathbf{V}(X) = \lambda \end{cases}$$

9. La sucesión de números $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ está definida mediante

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 3, \qquad a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + c_{n-2} \qquad \text{para } n \geq 2,$$

donde $(c_n)_{n=0}^{\infty}$ es una cierta sucesión cuya función generatriz es $g(x)$. Expresa, en términos de $g(x)$, la función generatriz $f(x)$ asociada a la sucesión (a_n).

10. Obténganse, utilizando funciones generatrices, los valores de las siguientes sumas:

$$a) \quad \sum_k k\binom{n}{k}\,; \qquad b) \quad \sum_k 3^{-k}\binom{n}{k}\,; \qquad c) \quad \sum_{k=1}^{n} k^2\,; \qquad d) \quad \sum_n \frac{n^2}{3^n}.$$

11. (a) Calcula el valor de la suma

$$a_n = \sum_k \binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{2^k}, \qquad \text{para cada } n \geq 0.$$

(b) Calcula el valor de la suma

$$\sum_n \binom{n+1}{2} a_n\,.$$

12. (1,5 puntos) (a) Halla la función generatriz de la sucesión de números (a_n) definida mediante

$$a_0 = 1,\ a_1 = 3,\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + 2^n \quad \text{para } n \geq 2.$$

(b) A la vista de la función generatriz obtenida, ¿qué sabrías decir sobre el comportamiento asintótico cuando $n \to \infty$ de los a_n?

13. (3 puntos) Queremos repartir 1000 ejemplares de un cierto libro a tres librerías.

a) Si cada ejemplar lleva una etiqueta que lo identifica, ¿de cuántas maneras se puede hacer el reparto?

b) Digamos ahora que los libros no llevan etiqueta alguna, de manera que son, a todos los efectos, indistinguibles. ¿Cuántos repartos distintos hay en este caso?

c) Seguimos con libros indistinguibles, pero ahora tenemos algunas restricciones en el reparto. La librería 1 exige recibir los ejemplares en paquetes individuales. La librería 2, en paquetes que contengan 2 ejemplares. La librería 3, por su parte, sólo admite envíos de 3 ejemplares. ¿Sabrías dar una manera de calcular el número de repartos distintos que se pueden hacer?