Economía y finanzas matemáticas
Optativa del grado en Matemáticas, UAM, 2013-2014

Hoja 3 (modelos matriciales)

1. Las acciones de las compañías A y B cotizan hoy a 108 y 3 euros, respectivamente. En nuestro modelo, proponemos que la cotización de A pueda tomar dos valores dentro de un mes: 120 y 85; mientras que la de B puede valer 2 y 5. Calcula cuál deberá ser el descuento a un mes en este modelo.

(Notas: Comprueba primero que no hay oportunidades de arbitraje. Calcula además la cartera de réplica correspondiente. ¡Y usa fracciones!).

2. Modelo matricial con dos escenarios y dos activos básicos: un subyacente S y la cuenta bancaria CB. El subyacente vale hoy S_0 euros. En el tiempo siguiente puede tomar los valores $S_0 \cdot u$ y $S_0 \cdot d$. El tipo (continuo) libre de riesgo para el periodo es del 3 %. Tomamos como numerario la CB. Halla la probabilidad de valoración. Repite el cálculo tomando al subyacente como numerario.

3. En un modelo matricial con cuatro estados $\{\omega_1, \dots, \omega_4\}$ consideramos, como activos básicos, los cuatro siguientes: el bono; un subyacente que toma los valores S_1, S_2, S_3, S_4 en cada uno de los escenarios; una call sobre ese subyacente con strike K y una put sobre el subyacente con ese mismo strike. Comprueba que el mercado no es completo. ¿Por qué no lo es?

4. Considera el siguiente modelo matricial:

$$\text{precios hoy} \to \begin{pmatrix} 0.9 \\ 0 \\ 0.1 \end{pmatrix} \qquad \text{flujos en } t = 1 \to \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \end{array} & \end{array}$$

a) Comprueba si el mercado es completo. Prueba que no existen oportunidades de arbitraje eligiendo un numerario (el que consideres más apropiado) y hallando la probabilidad de valoración asociada.

b) Valora el activo que paga 1, 2 y 3 en los escenarios ω_1, ω_2 y ω_3, respectivamente.

c) Supongamos que el precio hoy del tercer activo es 1/3, en lugar de 0.1. Comprueba que hay oportunidades de arbitraje; halla una.

5. Considera el siguiente modelo matricial:

$$\text{precios hoy} \to \begin{pmatrix} 0.9 \\ 0.3 \\ 0.1 \\ x \end{pmatrix} \qquad \text{flujos en } t = 1 \to \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{array} \\ \begin{array}{cccc} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 \end{array} & \end{array}$$

a) ¿Es completo el mercado? Describe los activos que son replicables en este mercado.

b) ¿Cuánto deberá valer x para que no haya oportunidades de arbitraje en el modelo?

c) Escoge para x el valor obtenido en el apartado anterior y toma como numerario el activo S_1. Halla todas las probabilidades de valoración asociadas a este numerario.

d) Comprueba que el activo $X = (1, 2, 3, 4)$ no es replicable. ¿Qué rango de precios le podemos asignar?

6. Tenemos un modelo matricial con estados $\{\omega_1, \dots, \omega_N\}$. Supongamos que para un cierto numerario $\mathbf{N}$ ya hemos hallado una probabilidad $p_1, \dots, p_N$ de valoración asociada. Ahora tomamos un numerario distinto, $\mathbf{M}$.

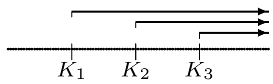
¿Podrías calcular una probabilidad $q_1, \dots, q_N$ de valoración asociada a $\mathbf{M}$? (en términos, claro, de los p_j y de los valores de $\mathbf{N}$ y $\mathbf{M}$ en tiempos $t = 0$ y $t = 1$).

7. Tenemos los siguientes **datos** de mercado:

- Subyacente S, cuyo valor hoy es $S_0 = 100$.
- Tipo continuo $r = 5\,\%$.
- Tres calls binarias C_1, C_2 y C_3 con vencimiento $T = 1$ año y strikes respectivos $K_1 = 90 \cdot e^{5\,\%}$, $K_2 = 100 \cdot e^{5\,\%}$, $K_3 = 110 \cdot e^{5\,\%}$. Cada call C_j paga 1 si el subyacente queda por encima de K_j, y 0 en caso contrario.
- Los precios de las tres calls son c_1, c_2 y c_3.

Objetivo: valorar el instrumento Z que en $T = 1$ paga 50 si el subyacente está entre K_1 y K_3, y 150 en caso contrario.

Activos básicos: la cuenta bancaria CB, que vale 1 en $t = 0$ y valdrá, en $t = 1$ y en cualquier escenario, e^r; y las tres calls digitales C_1, C_2 y C_3. No incluimos el subyacente S común a esas calls entre los activos básicos.



Escenarios: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$. Los escenarios vienen determinados por el subyacente:

$$\omega_1 = \{S \le K_1\}\,, \quad \omega_2 = \{K_1 < S \le K_2\}\,, \quad \omega_3 = \{K_2 < S \le K_3\}\,, \quad \omega_4 = \{K_3 < S\}\,.$$

Los activos de interés son los que toman un único valor en cada uno de los escenarios.

a) Comprueba que el modelo de mercado es completo. Halla la cartera de réplica para el activo X que paga $x_1 \dots, x_4$ en los escenarios $\omega_1, \dots, \omega_4$. Suponiendo que no haya oportunidades de arbitraje, deduce su precio hoy.

b) Tomamos la CB como numerario. Halla las condiciones que deben cumplir los precios c_1, c_2, c_3 para que haya una probabilidad de valoración asociada a ese numerario. Suponiendo que esas condiciones se verifican, halla el precio del activo X general anterior.

c) Elige los tres precios c_1, c_2, c_3 de manera que no haya arbitraje y calcula el precio de Z.

d) Supongamos que $c_2 - c_3 \le 0$. Halla una oportunidad de arbitraje.