**Conjuntos y Números**

**Curso 2002-2003**

**Hoja 3**

## Divisibilidad: números primos y números compuestos

**1.** Detectar los números primos entre los siguientes: 45, 47, 49, 53, 57, 58, 59, 60, 61, 709, 1067, 1069, 1071, 3137 y 4409. Escribir los conjuntos de divisores para los que sean compuestos.

**2.** Encontrar cuatro números consecutivos que sean compuestos. Si ha resultado fácil, tratar ahora de hacerlo con 5, 10, 15,... números consecutivos.

**3.** Usar las identidades

$$a + 10b + 100c + 1000d + 10000e = a + b + c + d + e + 9(b + 11c + 111d + 1111e)$$

$$a + 10b + 100c + 1000d + 10000e = a - b + d - d + e + 11(b + 9c + 91d + 909e)$$

para obtener criterios de divisibilidad por 3, 9 y 11.

**4.** Calcular el máximo común divisor de los números siguientes: m.c.d.$(36, 84)$, m.c.d.$(231, 99)$, m.c.d.$(360, 150)$.

**5.** Con el algoritmo de Euclides, calcular m.c.d.$(124, 36)$, m.c.d.$(2112, 363)$, m.c.d.$(93, 341)$. Expresarlo en cada caso en la forma $d = ax + by$.

**6.** Dados los números 120 y 300, calcula los conjuntos de sus divisores. Utiliza el algoritmo de Euclides para hallar m.c.d.$(120, 300)$ y comprueba que los divisores de m.c.d.$(120, 300)$ son los comunes de 120 y 300. Escribe m.c.d.$(120, 300) = 120x + 300y$.

**7.** Usar el algoritmo de Euclides para calcular el m.c.d. de los números siguientes:

$$\begin{array}{ccc} \text{m.c.d.}(89, 74) & \text{m.c.d.}(6120, 378) & \text{m.c.d.}(450, 360) \\ \text{m.c.d.}(1260, 75) & \text{m.c.d.}(345, 180) & \text{m.c.d.}(315, 140) \\ \text{m.c.d.}(4300, 720) & \text{m.c.d.}(980, 616) & \text{m.c.d.}(2080, 930) \end{array}$$

**8.** Averiguar si son primos o compuestos los números siguientes: 547, 793, 729, 989, 1073, 1103, 951, 1167, 2339, 843.

**9.** El m.c.d. de los números 729 y 125 es igual a 1. Encontrar dos enteros $x, y$ de manera que se tenga la igualdad: $1 = 729x + 125y$.

**10.** Si un primo $p$ divide a un producto de números, $a \cdot b \cdot c \cdot d \ldots$, entonces es divisor de uno de los factores. Demuéstralo (intenta primero el caso de tres factores).

## El Teorema fundamental de la Aritmética

**11.** Escribir la descomposición normal de los números siguientes: 90, 270, 1221, 140 y 8712.

**12.** a) Usar la criba de Eratóstenes para confeccionar la lista de los primos menores que 500.
b) Contar el número de parejas de primos hermanos que aparecen en la lista anterior.

**13.** Usar el algoritmo de Euclides para calcular el máximo común divisor de los números siguientes:

$$\begin{array}{cc} \text{m.c.d.}(488, 183) & \text{m.c.d.}(386, 579) \\ \text{m.c.d.}(138, 460) & \text{m.c.d.}(2167, 1082)\,. \end{array}$$

**14.** Hallar la descomposición en factores primos de los números siguientes: 2412, 24353, 1994, 819 y 36863.

**15.** Los libros de una biblioteca no pasan de 10000 y los podemos distribuir exactamente en lotes de 12 unidades, de 27 unidades y también de 49 unidades. ¿Cuántos libros hay exactamente en la biblioteca?

**16.** Al contar el número de alumnos de un colegio de 4 en 4, de 5 en 5 o de 6 en 6, resulta que siempre sobran 2. ¿Cuál es el número de alumnos, sabiendo que está comprendido entre 100 y 150?

**17.** En el conjunto de números {16, 24, 25, 27, 30}, elegir tres que sean primos entre sí dos a dos.

**18.** Averiguar si son primos o compuestos los números siguientes: 547, 793, 729, 989, 1073, 1103, 951, 1993, 1167,2339, 843, 1337 y 2809.

**19.** Comprobar que la suma de dos impares consecutivos es siempre un múltiplo de 4.

**20.** Obtener todos los divisores de los números: 504, 180, 240, 700.

**21.** Observa que

$$\begin{array}{rcrlr} 15^2 & = & 225, & (2\text{—}25, & 2 = 1\times 2) \\ 25^2 & = & 625, & (6\text{—}25, & 6 = 2\times 3) \\ 35^2 & = & 1225, & (12\text{—}25, & 12 = 3\times 4) \\ 45^2 & = & 2025, & (20\text{—}25, & 20 = 4\times 5) \\ & \dots & \dots & & \end{array}$$

En general, $(a5)^2 = (5+10a)^2 = 5^2 + 100a^2 + 100a = 100a(a+1) + 25$. Deduce un truco para impresionar a las amistades calculando con facilidad los cuadrados de los números terminados en 5.

**22.** La fórmula $n^2+n+41$ produce números primos cuando se sustituyen los valores $n = 0$, 1, 2, 3, …, 40. Ejemplos: $n = 0$ da 41; $n = 1$ produce 43; $n = 2$ da lugar a 47, etc. Compruébalo. ¿Qué ocurre cuando $n \geq 41$?

**23.** Los griegos llamaban a un número perfecto si la suma de sus divisores era el doble del número. Ejemplos:

i) 6 es perfecto ya que sus divisores son $\{1, 2, 3, 6\}$ y $1+2+3+6 = 2\times 6$;

ii) 28 es perfecto ya que sus divisores son $\{1, 2, 4, 7, 14, 28\}$ y $1+2+4+7+14+28 = 2\times 28$.

Los cinco números perfectos son:

$$6,\ 28,\ 496,\ 8128,\ 33550336\,.$$

Compruébalo. Es un problema abierto saber si existe algún número perfecto impar. Tampoco se sabe cuántos perfectos pares hay: ¿son un número finito?

**24.** Comprobar que los siguientes números no son perfectos:

$$3\times 5,\ 3^2\times 5,\ 3\times 5^2,\ 3^2\times 5^2,\ 3^3\times 5,\ 3^3\times 5^2\,.$$

**25.** Demostrar que, cualesquiera que sean los exponentes $m$ y $n$, el número $3^m\times 5^n$ no puede ser perfecto.

**26.** Dados dos enteros positivos $a$ y $b$, observa que

$$a\times b = \text{m.c.d.}(a,b)\times \text{m.c.m.}(a,b)\,.$$

**27.** Sea $d = \text{m.c.d.}(a,b)$. Demuestra que los enteros $a/d$ y $b/d$ son primos entre sí.