Matemática Discreta
Tercero de Matemáticas
Curso 2001-2002

Hoja 3

1. ¿Cuántas veces debe lanzarse un par de dados para asegurar que la puntación suma se repita? ¿Y para asegurar que alguna puntuación suma aparezca cuatro veces por lo menos?

2. Sea S un conjunto cualquiera de n números naturales. Probar que existe algún subconjunto de S tal que la suma de sus elementos es un múltiplo de n.

3. Sea n un número natural primo con 10. Demostrar que n tiene infinitos múltiplos cuyos dígitos son todos unos.

4. Demostrar que en cualquier reunión siempre hay dos personas que tienen el mismo número de amigos en dicha reunión.

5. (Erdős) Demostrar que en cualquier subconjunto de $n+1$ elementos del conjunto $\{1, 2, 3 \ldots, 2n\}$ hay un elemento que divide a otro. *Sugerencia:* construir los palomares en función del máximo divisor impar de cada número.

6. Se forman todas las listas con repetición con los símbolos $\{1, 2, \ldots 100\}$ de longitud 10. Dos listas se dicen *primas entre sí* si en alguna posición tienen el mismo símbolo. ¿Cuál es el número máximo de listas que se pueden extraer de forma que cada dos de las extraídas no sean primas entre sí?

7. Probar que si extraemos $n + 1$ números distintos de entre $\{1, \ldots, 2n + 1\}$, entonces hay dos cuya suma es $2n+1$. *Sugerencia*: observar cuántas parejas de números suman exactamente $2n+1$.

8. Probar que en un poliedro siempre hay dos caras con el mismo número de lados.

9. Se colorea el plano con dos colores: probar que hay dos puntos a distancia 1 con el mismo color. Más (bastante más) difícil: ¿y con tres colores?

10. En una urna tenemos todas las matrices 3×3 formadas con los símbolos $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. ¿Cuántas debemos extraer para asegurar que al menos dos de éstas tengan la misma diagonal principal?

11. En una clase se imparten 5 asignaturas con dos posibles calificaciones cada una: suspenso y aprobado. Si en la clase hay 70 alumnos, demostrar que hay al menos 3 alumnos que han aprobado exactamente las mismas asignaturas.

12. Tenemos una urna con todas las 19-listas con símbolos $\{1, 2, \ldots, 10\}$. ¿Cuántas listas debemos extraer de esa urna para garantizar que entre las extraídas hay por lo menos dos en las que los símbolos de la primera posición son iguales y los símbolos de la última posición también son iguales?

13. En un grupo de 7 personas, la suma de las edades es 332 años. Probar que se puede escoger a tres de ellos de manera que la suma de sus edades sea al menos 143 años.

14. Supongamos que distribuimos al azar los números de 1 a 10 en un círculo. Comprobar que hay 3 números dispuestos consecutivamente cuya suma es al menos 17.

15. Probar que hay una potencia de 3 cuya expresión decimal termina en 001.

16. Nos damos un conjunto X de 10 números distintos comprendidos entre 10 y 99. Demostrar que hay dos subconjuntos distintos de X tales que las sumas de los elementos de los dos subconjuntos dan el mismo resultado.

17. Los registros de una matriz 3×3 son los números 0, 1 y -1. Probar que entre las 8 sumas que se obtienen por filas, columnas y diagonales, hay dos iguales.

18. Se trazan 7 rectas en el plano, de manera que no hay dos que sean paralelas. Probar que hay dos que forman un ángulo menor que 26 grados.

Los ejercicios que siguen son un poco más difíciles que los anteriores.

19. * Se colorean los puntos del plano con colores de una paleta de 100 colores. Probar que podemos encontrar un rectángulo, con lados paralelos a los ejes, cuyos vértices llevan el mismo color.

20. * Dentro de un cuadrado 1×1 se dan 101 puntos. Probar que hay tres que determinan un triángulo de área a lo sumo 0.01.

21. * Se colorean los números reales con dos colores.
a) Demostrar que hay tres números reales en progresión aritmética con el mismo color.
b) Demostrar que hay cuatro números reales en progresión aritmética con el mismo color.

22. * Hallar el número máximo de puntos de coordenadas enteras que se pueden disponer en el espacio, de tal manera que los segmentos que unen cada dos puntos no contengan otros puntos de coordenadas enteras más que los extremos.

23. * Los registros de una matriz 10×10 son números enteros. Diremos que dos registros son vecinos si tienen un lado en común. Supongamos que los registros vecinos se diferencian en, a lo sumo, 5. Probar que dos de esos registros han de ser iguales.

24. * Se dan 25 puntos en el plano. Se sabe que dados cualesquiera tres de ellos, hay dos a distancia ≤ 1. Probar que hay por lo menos 13 que están dentro de un círculo de radio 1.

25. * Se dice que un conjunto de enteros A es un conjunto de Sidon si todas las sumas $a + a'$, $a \leq a' \in A$ son distintas. Sea $F(N)$ el mayor número de elementos que puede tener un conjunto de Sidon incluido en $\{1, \ldots, N\}$. Hallar cotas inferiores y superiores para $F(N)$.