Cálculo 1

Curso 2010-2011

Primero curso, grado en Matemáticas (grupo 715)

Hoja 3: Límites de funciones

1.- Demuestra, usando la formulación en términos de ε y δ, que

$$\text{(a) } \lim_{x\to 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}, \qquad \text{(b) } \lim_{x\to 1} \frac{2\,x}{3+x} = \frac{1}{2}, \qquad \text{(c) } \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{|x|} = 0, \qquad \text{(d) } \lim_{x\to 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0.$$

2.- Discute la existencia de los límites siguientes y calcula su valor cuando sea posible:

$$\text{(a) } \lim_{x\to -2} \frac{x^3+8}{x^2-4} \qquad \text{(b) } \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} \qquad \text{(c) } \lim_{x\to 0} \frac{x^2\,(3+\operatorname{sen} x)}{(x+\operatorname{sen} x)^2}$$

$$\text{(d) } \lim_{x\to \infty} \frac{\sqrt{1+x}}{x} \qquad \text{(e) } \lim_{x\to \infty} \frac{\sqrt{x}-x+1}{\sqrt{x}+x-1} \qquad \text{(f) } \lim_{x\to -1} \frac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x+4}}{x^2+4\,x+3}$$

$$\text{(g) } \lim_{x\to 0} \frac{2^x+3^x}{x} \qquad \text{(h) } \lim_{x\to 2^-} \frac{x}{x^2-4} \qquad \text{(i) } \lim_{x\to 1} \frac{|x-1|}{x-1}$$

$$\text{(j) } \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} \operatorname{sen} \frac{1}{x} \qquad \text{(k) } \lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}} \qquad \text{(l) } \lim_{x\to 0} \cos \frac{1}{x^2}$$

Indicación: en el caso (k), *puede ser útil recordar que* $\cos x = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x}$.

3.- (*) Demuestra que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

Utilízalo para calcular

$$\text{(a) } \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} \qquad \text{(b) } \lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}(x^2-1)}{x-1} \qquad \text{(c) } \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(\tan x)}{x}$$

4.- En las siguientes expresiones, aparece la función *parte entera*, denotada por $[x]$, y que representa al mayor número entero que es menor o igual que x. Discute la existencia de los límites siguientes y calcula su valor cuando sea posible:

$$\text{(a) } \lim_{x\to 0} \frac{x}{4}\left[\frac{3}{x}\right] \qquad \text{(b) } \lim_{x\to 1} x\left[\frac{3}{x}\right]$$

$$\text{(c) } \lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{x-1}\right)^{[x]} \qquad \text{(d) } \lim_{x\to 1} \left(\left|\frac{x^2-3x+2}{x^2+x-2}\right|^3 + x^6 - 1\right)^{[x]}$$

5.- Encuentra las constantes a y b para las que

$$\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+x+1} - a\,x - b) = 1.$$

6.- Estudia si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas:

(a) Si existen los límites $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))$, entonces existe el límite $\lim_{x\to a} g(x)$.

(b) Si no existen los límites $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a} g(x)$, entonces no existe el límite $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))$.

(c) Si $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$, entonces $\lim_{x\to a} |f(x)| = |\ell|$.

(d) Si $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \neq c$, entonces, en caso de existir ambos límites,

$$\lim_{x\to c} f(x) \leq \lim_{x\to c} g(x).$$

(e) Si $f(x) < g(x)$ para todo $x \neq c$, entonces, en caso de existir ambos límites,

$$\lim_{x\to c} f(x) < \lim_{x\to c} g(x).$$

7.- Sea $f(x)$ tal que

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0,$$

y sea $g(x)$ tal que $|g(x)| < K$ para todo x. Demuestra que

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = 0.$$

Estudia si se puede "debilitar" de alguna manera la hipótesis sobre g.