Probabilidad 1
Segundo de Matemáticas
Curso 2002-2003

Hoja 2

1. ¿Para qué valores del parámetro c la función p definida por:

$$p(k) = \begin{cases} \dfrac{c}{k(k+1)} & \text{si } k = 1, 2, \ldots \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

es la función de densidad de una variable aleatoria discreta? ¿Y para qué valores de α y c sería función de densidad de una variable aleatoria la función

$$p(k) = \begin{cases} c\, k^{\alpha} & \text{si } k = 1, 2, \ldots \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad ?$$

2. Si X es una variable de Poisson con parámetro λ, demostrar que la probabilidad de que X sea **par** es $e^{-\lambda} \cosh(\lambda)$

3. Sea X una variable aleatoria discreta que sigue una distribución geométrica con parámetro p, demostrar que la probabilidad de que X sea mayor que k es $(1-p)^k$.

4. Una variable aleatoria X toma valores $\{0, 1, 2, \ldots\}$. Demostrar que

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(X > k)$$

(si es que la serie de la derecha converge).

5. Sea X una variable aleatoria discreta con $\mathrm{Val}(X) = \{0, 1, 2, \ldots\}$ y que tiene $\mathbf{E}(X) = 1$ y $\mathbf{V}(X) = 1$. Demostrar que, para cualquier natural k,

$$\mathbf{P}\left(X \geq k+1\right) \leq \frac{1}{k^2}$$

6. Si X sigue una distribución binomial con parámetros n y p, demostrar que

$$\mathbf{E}(X) = np \qquad \text{y} \qquad \mathbf{E}(X^2) = np(1-p) + n^2p^2\,.$$

7. Hallar la varianza de una variable aleatoria X que sigue una distribución geométrica de parámetro p.

8. En media, sólo una persona de cada 1000 tiene un cierto tipo peculiar de sangre.

a) Hallar la probabilidad de que en una ciudad de 10000 personas no haya nadie con ese tipo de sangre.

b) ¿Cuál es el número mínimo de personas (elegidas al azar) cuya sangre debemos analizar para tener una probabilidad de al menos 50% de que entre ellas haya alguna persona con ese tipo de sangre?

9. Una compañía aérea sabe que un 4% de los pasajeros que hacen reservas en un vuelo no se presentan a facturar. La política de la compañía es vender 100 reservas en un avión de 98 plazas. ¿Cuál es la probabilidad de que (habiendo vendido 100 reservas) el vuelo parta completo?

10. Tenemos tres puertas, tras las que se esconden premios de cuantías 10, 2 y 1. ¿Cuál es, en media, el premio que obtendremos si elegimos una de las puertas al azar?

11. En Las Vegas, la ruleta tiene los números del 1 al 36 y además un 0 y un 00 (sobre estos dos últimos no se apuesta). Estos treinta y ocho resultados son igualmente probables. Cuando se apuesta 1 dólar a un número, el jugador recibe 36 dólares (ganancia de 35 dólares) si la bola cae en el número; en caso contrario, se pierde la apuesta de 1 dólar (ganancia de -1). ¿Cuál es la ganancia esperada?

Si se apuesta 1 dólar a Par, por ejemplo, entonces se recibe otro dólar si sale Par y se pierde el dólar apostado si sale impar. ¿Cuál es ahora la ganancia media?

12. Una Familia Real tendrá hijos hasta que tenga un hijo varón o hasta que tenga tres hijos. La probabilidad de hijo varón es de un 50%. ¿Cuál el número medio de hijos que van a tener?

13. Tienes 80 dólares y participas en el siguiente juego. Una urna contiene 2 bolas blancas y 2 bolas negras. Se van a extraer las cuatro bolas seguidas sin reemplazamiento y sin que se descubran hasta el final. En cada paso apuesta la mitad de tu fortuna a que sale blanco. ¿Cuál es tu ganancia esperada?

14. Tenemos seis posibles llaves para abrir una puerta, una sola de las cuales la abre. Intentamos las llaves, una tras otra. ¿Cuál es el número esperado de intentos que necesitaremos?

15. El pueblo contra Collins. Los datos del caso: una joven rubia con coleta protagoniza un atraco y es vista huir, a bordo de un coche amarillo, en compañía de varón negro con barba y bigote. Unos días después es detenida una tal Janet Collins, rubia, con coleta, que al parecer anda en tratos con un hombre negro con barba y bigote y que posee un coche amarillo. El fiscal estima las probabilidades de cada una de esas características y, suponiendo independencia entre todas ellas, llega la conclusión de que la probabilidad de reunir todas las características es de una entre 12 millones. El veredicto parece claro. Haz de abogado defensor: suponemos que hay n parejas en la ciudad y que el número de parejas que reúnen todas las características sigue una binomial $Bin(n,p)$, donde $p = 1/12000000$. Formula (y responde, suponiendo que el caso se desarrolla en una ciudad como Los Angeles) la pregunta correcta que permite dudar sobre la culpabilidad de la Srta. Collins.

16. Las huellas dactilares. Se acepta que el número de individuos X en una población que tiene huellas dactilares de un cierto tipo sigue una Poisson con cierto parámetro λ (reflexiona sobre la validez de esta hipótesis).

Un delincuente deja una huella dactilar del tipo t en el escenario de un crimen. La probabilidad de tener una tal huella es de 1 entre un millón, y en la ciudad viven 10 millones de personas. Se detiene a un sospechoso con ese tipo de huellas dactilares. Con esta única evidencia, ¿crees que sería condenado en un juicio?

17. El **coleccionista de cromos**: tratamos de completar nuestra colección de cromos; hay N cromos diferentes. Cada mañana vamos al kiosko y compramos un sobre con un cromo. Al principio, claro, vamos obteniendo cromos diferentes, pero cabe la posibilidad de que nos vayan entrando cromos repetidos. ¿Cuántas mañanas, en media, tendremos que ir al kiosko hasta completar nuestra colección?

18. Demostrar que, si X sigue una distribución geométrica de parámetro p, entonces

$$\mathbf{P}(X > m + n | X > m) = \mathbf{P}(X > n)$$

(podríamos decir que X no “tiene memoria”). Demostrar que si una variable X con $Val(X) = \{1, 2, \dots\}$ tiene esta propiedad de “pérdida de memoria”, entonces sigue una distribución geométrica.

19. Una variable aleatoria X toma valores en el conjunto $\{x_1, \ldots, x_n\}$, con probabilidades $p_1, \ldots, p_n$. Definimos la **entropía** de la variable aleatoria X como

$$H(X) = \sum_{j=1}^{n} p_j \, \log\left(\frac{1}{p_j}\right)$$

Demostrar que, si nos damos unos números $q_1, \ldots, q_n$ no negativos y tales que $\sum_{j=1}^{n} q_j = 1$, entonces

$$H(X) \leq \sum_{j=1}^{n} p_j \log\left(\frac{1}{q_j}\right) .$$

¿Cuándo se tiene la igualdad? Deducir de la desigualdad anterior que

$$H(X) \leq \log(n) .$$

De nuevo, ¿cuándo se tiene la igualdad? La entropía es un concepto fundamental en la Teoría de la Información y de la Comunicación (quizás a alguien le interese buscar alguna referencia en la que se explique este papel).

Hallar $H(X)$ para una variable aleatoria X que sigue una Bernoulli de parámetro p. ¿Qué podemos decir de $H(X)$ si X sigue una binomial $Bin(n, p)$?

20. Jugamos a la ruleta (tiene un único cero), y siempre apostamos al rojo. Si sale rojo, ganamos una cantidad igual a nuestra apuesta. Pero seguimos la siguiente estrategia: la primera apuesta es de 1 dólar; si ganamos, nos retiramos. En caso contrario, doblamos nuestra apuesta (apostamos 2) para la siguiente partida. De nuevo, si ganamos nos retiramos; y si perdemos volvemos a doblar la apuesta, que sería de 4 (así jugaba Casanova, durante el Carnaval de Venecia, allá por 1754; esta estrategia se conoce como el juego a la **martingala**). Comprueba que esta estrategia te hace ganar 1 dólar tarde o temprano. ¿Dónde está la “trampa”? Calcula cuál es, en media, la apuesta que debes hacer para ganar ese dólar.

Haz un modelo más realista, suponiendo que hay un límite de apuestas en el casino. Por ejemplo, que no está permitido apostar más 2^{10} dólares. O quizás que no se puede apostar más de 10 veces seguidas.

21. Errores de imprenta. Cada carácter en un libro se imprime incorrectamente (de manera independiente de cualquier otro) con probabilidad p. Hay n caracteres en el libro y X cuenta el número de errores cometidos. Calcular $\mathbf{P}(X = r)$ y $\mathbf{E}(X)$.

Supongamos ahora que $\mathbf{E}(X)$ es fijo: calcular $\mathbf{E}(X|X \neq 0)$. Mostrar que, cuando $n \to \infty$,

$$\mathbf{E}(X|X \neq 0) \longrightarrow \frac{\mathbf{E}(X)}{1 - e^{-\mathbf{E}(X)}} .$$

22. La **ruina del jugador**. Jugamos partidas a cara y cruz (probabilidad p de obtener cara), apostando siempre 1, hasta que, o bien hayamos alcanzado una fortuna N o bien nos hayamos arruinado (fortuna 0). Llamamos $p(n)$ a la probabilidad de arruinarnos si nuestra fortuna inicial es n. Obsérvese que $p(0) = 1$ y $p(N) = 0$. Comprobar que, para $1 \leq n \leq N - 1$,

$$p(n) = p\, p(n+1) + (1-p)\, p(n-1) .$$

Halla, si es que te sientes capaz, la solución de esta relación de recurrencia.

Calcular el número medio de partidas que se disputan hasta que el juego termina (de nuevo, obtendrás una relación de recurrencia, que puedes intentar resolver).

23. Un dado con seis caras tiene 3 unos, 2 doses y 1 cinco. Calcular el número medio de lanzamientos que deberemos hacer para que aparezcan los tres posibles resultados.