

Probabilidad II
Tercero de Matemáticas
Curso 2007-2008

Hoja 2 (independencia)

1. Sabemos que si X e Y son independientes (con $\mathbf{E}(|X|), \mathbf{E}(|Y|) < +\infty$), entonces $\mathbf{E}(X \cdot Y) = \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)$. Comprueba que el recíproco no es cierto con el siguiente ejemplo. Las variables X e Y toman valores $\{-1, 0, 1\}$ con las probabilidades que se muestran en la tabla de la derecha (donde $a, c > 0$ y $2a+2b+c = 1$). Comprueba que $\mathbf{E}(X \cdot Y) = \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)$ pero que X e Y no son independientes.

	-1	0	1
-1	0	a	0
0	b	c	b
1	0	a	0

2. (a) Supongamos que

$$X = \begin{cases} 0 & \text{con probabilidad } 1/2; \\ 1 & \text{con probabilidad } 1/2; \end{cases} \quad Y = \begin{cases} 0 & \text{con probabilidad } 1/2; \\ 1 & \text{con probabilidad } 1/2; \end{cases}$$

Describe todas las posibles distribuciones conjuntas del par (X, Y) y calcula la covarianza y la correlación en cada una de ellas.

(b) Lo mismo, para

$$X = \begin{cases} x_1 & \text{con probabilidad } p; \\ x_2 & \text{con probabilidad } 1-p; \end{cases} \quad Y = \begin{cases} y_1 & \text{con probabilidad } q; \\ y_2 & \text{con probabilidad } 1-q; \end{cases}$$

(con $x_1 > x_2$ y $y_1 > y_2$; sugerencia: escríbase $\mathbf{P}(X = x_1, Y = y_1) = p^2 + \varepsilon$ para cierto ε); y para

$$X = \begin{cases} 0 & \text{con probabilidad } 1/2; \\ 1 & \text{con probabilidad } 1/2; \end{cases} \quad Y = \begin{cases} 0 & \text{con probabilidad } 1/3; \\ 1 & \text{con probabilidad } 1/3; \\ 2 & \text{con probabilidad } 1/3; \end{cases}$$

3. Compruébese que las variables aleatorias X_n en $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ (con $\Omega = [0, 1]$, $\mathcal{F} = \sigma$ -álgebra de Borel, $P =$ medida de Lebesgue) dadas por $X_n(\omega) = \sin[(2\pi n)\omega]$ son incorreladas, pero no independientes.

4. Sean X e Y dos variable aleatorias independientes que toman valores enteros. Comprueba que, para cada $n \in \mathbb{Z}$,

$$\mathbf{P}(X + Y = n) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \mathbf{P}(X = m) \mathbf{P}(Y = n - m).$$

(a) Si X e Y son sendas variables (independientes) Poisson de parámetros λ y μ , respectivamente, ¿qué distribución tiene la variable $X + Y$?

(b) ¿Y si X sigue una Binomial(n, p) e Y una Binomial(m, p) (y son independientes)?

(c) Comprueba que la suma de n variables Bernoulli(p) independientes es una Binomial(n, p).

(d) ¿Es la suma de dos Bernoulli(p) (no necesariamente independientes) una Binomial($2, p$)?

5. (a) Sean X e Y dos variable aleatorias independientes con funciones de densidad f y g . Comprueba que $X + Y$ tiene densidad h dada por

$$h(z) = \int f(z - u)g(u)du.$$

(b) Comprueba que la suma de n variables exponenciales de parámetro λ (densidad $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ si $x \geq 0$) independientes es una Gamma(n, λ) (densidad $f(x) = \frac{1}{\Gamma(n)} \lambda^n e^{-\lambda x} x^{n-1}$ si $x \geq 0$).

6. Sea (X, Y) un par de variables aleatorias con función de densidad conjunta

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{1-\rho^2}\right).$$

Comprueba que la correlación entre X e Y es ρ y que X e Y son independientes si y sólo si $\rho = 0$.

7. Sean $X_1, \dots, X_n$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con función de densidad común f . Calcula las funciones de distribución y de densidad de

$$M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\} \quad \text{y} \quad m_n = \min\{X_1, \dots, X_n\}.$$

8. Sean $X_1, \dots, X_n$ variables aleatorias independientes con distribución común $\mathcal{N}(0, 1)$. Comprueba que la variable aleatoria $S = \sum_{j=1}^n X_j^2$ tiene densidad dada por

$$f_S(x) = \frac{1}{\Gamma(n/2)} \frac{1}{2^{n/2}} e^{-x/2} x^{n/2-1} \quad (\text{una } \chi^2 \text{ con } n \text{ grados de libertad}).$$

9. Escogemos puntos “al azar” (uniformemente) en el cuadrado $[-1, 1]^2$. En media, ¿cuál será la distancia al origen?

10. Sean X e Y dos variables normales estándar independientes. Calcula $\mathbf{E}(X^2 + Y^2)$ y $\mathbf{E}(\sqrt{X^2 + Y^2})$.

11. Sea (X, Y) un par de variables aleatorias con distribución conjunta uniforme en el cuadrado que tiene como vértices los puntos del plano $(0, 1), (1, 0), (-1, 0)$ y $(0, -1)$.

(a) Halla $\mathbf{E}(X^k)$ para cada $k = 1, 2, \dots$

(b) Halla $\mathbf{P}(\max(|X|, |Y|) \leq 1/2)$.

(c) Comprueba que X e Y no son independientes y calcula la $\text{cov}(X, Y)$.

12. Lanzamos una moneda regular n veces. Por cada cara sumamos un $+1$, y por cada cruz, un -1 . Llamamos X_n a la variable aleatoria que registra el balance de caras y cruces.

(a) Comprueba que, para cualquier $t > 0$,

$$\mathbf{E}(e^{tX_n}) = (\cosh(t))^n \leq e^{t^2 n}$$

(sugerencia: escríbase X_n como suma de n variables Bernoulli($1/2$) independientes).

(b) Verifica que $\mathbf{P}(X_n > \lambda) \leq e^{-\lambda^2/(4n)}$.

(c) Compárese con la estimación de $\mathbf{P}(X_n > \lambda)$ que se obtiene aplicando directamente la desigualdad de Chebyshev.

(d) Utiliza los apartados anteriores para estimar $\mathbf{P}(\text{Bin}(n, 1/2) > n/2 + \lambda)$.