Geometría II
Segundo de Matemáticas
Curso 2004-2005

Hoja 2 (Superficies y primera forma fundamental)

1. Comprueba que

a) el cilindro $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$ es una superficie;

b) mientras que el cono $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2\}$ no lo es. ¿Y si sólo consideramos una hoja del cono: $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2, z \geq 0\}$?

c) Considera la función $f(x, y, z) = z^2$. Comprueba que 0 no es un valor regular de f y que, sin embargo, $f^{-1}(0)$ es una superficie.

2. Demuestra que el elipsoide

$$S = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\Big\}$$

es una superficie y que $\mathbb{X}(u, v) = (a \sin(u) \cos(v), b \sin(u) \sin(v), c \cos(u))$, con $0 < u < \pi$ y $0 < v < 2\pi$, es una carta o parametrización de S. Describe geométricamente las curvas $u = cte$, las curvas $v = cte$ y la imagen de $\mathbb{X}$.

3. Parametriza (y dibuja) el hiperboloide de dos hojas $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = -1\}$

4. Proyección estereográfica. Considera la esfera unidad $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2=1\}$. La proyección estereográfica $\boldsymbol{\pi}$ es la transformación de $S^2 \setminus \{N\}$, donde $N = (0, 0, 1)$, definida por ser $\boldsymbol{\pi}(x, y, z)$ el punto donde la recta que pasa por N y (x, y, z) corta al plano xy. Verifica que la inversa de $\boldsymbol{\pi}$ viene dada por

$$\boldsymbol{\pi}^{-1}(u, v) = \Big(\frac{2u}{1 + u^2 + v^2}, \frac{2v}{1 + u^2 + v^2}, \frac{u^2 + v^2 - 1}{1 + u^2 + v^2}\Big)$$

y que $\boldsymbol{\pi}^{-1}$ es una parametrización de la esfera.

5. Una superficie reglada S es la superficie que una recta L "barre" al moverse sobre una curva $\boldsymbol{\gamma}$. Si $\boldsymbol{\gamma} : I \to \mathbb{R}^2$ y $\boldsymbol{\delta} : I \to \mathbb{R}^3$ son ambas diferenciables, entonces S viene dada por

$$\mathbb{X}(t, v) = \boldsymbol{\gamma}(t) + v\, \boldsymbol{\delta}(t)\,,$$

donde $t \in I$ y donde, en general, y para que $\mathbb{X}$ sea una carta, es necesario restringir v a un intervalo.

a) Si $\boldsymbol{\gamma}(t) = \mathbf{p}$, decimos que $\mathbb{X}$ describe un *cono*. Verifica que $\mathbb{X}$ es carta en la región donde $v \neq 0$ y $\boldsymbol{\delta}(t) \times \boldsymbol{\delta}'(t) \neq \mathbf{0}$.

b) Si $\boldsymbol{\delta}(t) = \mathbf{q}$, decimos que $\mathbb{X}$ describe un *cilindro*. Verifíquese que $\mathbb{X}$ es carta en la región donde $\boldsymbol{\gamma}'(t) \times \mathbf{q} \neq \mathbf{0}$.

6. La superficie reglada S dada por $\mathbb{X}(t, v) = \boldsymbol{\gamma}(t) + v\, \boldsymbol{\delta}(t)$ se dice desarrollable si el plano tangente es el mismo en los puntos de cada línea recta $t = cte$. Verifíquese que una condición necesaria y suficiente para ser desarrollable es que $(\boldsymbol{\gamma}'(t) \times \boldsymbol{\delta}(t)) \cdot \boldsymbol{\delta}'(t) = \mathbf{0}$.

7. Determinar la ecuación de los planos tangentes T_pS correspondientes a

a) $p = (0, 0, 0)$ y $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1\}$;

b) $p = (1, -2, 3)$ y $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2/4 + y^2/16 + z^2/18 = 1\}$;

c) $p = \mathbb{X}(2, \pi/4)$ y S es el helicoide parametrizado por $\mathbb{X}(u, v) = (u \cos(v), u \sin(v), 2v)$.

8. Verificar que los planos tangentes de una superficie dada por una ecuación de la forma $z = xf(y/x)$, $x \neq 0$, donde f es diferenciable, pasan todos por el origen.

Primera forma fundamental

9. Calcula la primera forma fundamental para las siguientes parametrizaciones del hiperboloide de una hoja $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$ (o parte de él):

- $\mathbb{X}(u, v) = (\ \cos(u)\cosh(v)\ ,\ \operatorname{sen}(u)\cosh(v)\ ,\ \operatorname{senh}(v)\ )$.
- $\mathbb{X}(u, v) = (\ \cos(u) - v\operatorname{sen}(u)\ ,\ \operatorname{sen}(u) + v\cos(u)\ ,\ v\ )$.
- $\mathbb{X}(u, v) = (\ u\ ,\ v\ ,\ \sqrt{u^2 + v^2 - 1}\ )$, donde $u^2 + v^2 > 1$.

10. Obténgase la primera forma fundamental de la esfera en la parametrización dada por la proyección estereográfica.

11. Verifíquese que $\mathbb{X}(u, v) = (u\sin(\alpha)\cos(v), u\sin(\alpha)\sin(v), u\cos(\alpha))$, con $0 < u < \infty$, $0 < v < 2\pi$, es una parametrización del cono de ángulo 2α al que le quitamos el vértice. Pruébese que la curva

$$\boldsymbol{\omega}_\beta(v) = \mathbb{X}(e^{v\sin(\alpha)\operatorname{cotg}(\beta)}, v)\,,$$

donde β es una constante, corta a los generadores, esto es, a las curvas $v = cte$, en ángulo β.

12. Las curvas coordenadas de una parametrización $\mathbb{X}(u, v)$ de una superficie forman una *red de Chebychev* si las longitudes de lados opuestos de cualquier cuadrilátero formado por ellas son iguales. Verifíquese que esto ocurre si y sólo si $E_v = G_u = 0$.

13. Loxodromas. Hállense las curvas de la esfera que forman un ángulo constante β con los meridianos.

14. Proyección de Mercator. Determina una función $\varphi(v)$ (con $\varphi(0) = \pi/2$) para la que la parametrización de la esfera

$$\mathbb{X}(u, v) = \big(\sin(\varphi(v))\cos(u), \sin(\varphi(v))\sin(u), \cos(\varphi(v))\big)$$

sea conforme (esto es, conserve ángulos). Halla explícitamente E, F, G para la parametrización que resulta.

La aplicación $\mathbb{X}^{-1}$ es conocida como la proyección de Mercator. Su imagen proporciona un *mapamundi* en el que los ángulos son correctos, pero las distancias no. ¿En qué se transforman los meridianos por $\mathbb{X}^{-1}$? ¿Y las loxodromas?

15. Comprueba que la proyección estereográfica de la esfera unidad es conforme. ¿En qué se transforman las loxodromas con esta proyección? ¿Cómo son las loxodromas cerca de los polos?

16. De las siguientes formas cuadráticas, ¿cuáles no pueden servir como primera forma de una superficie?

$$\begin{array}{ll} (a)\quad ds^2 = du^2 + 4dudv + dv^2\,; & (b)\quad ds^2 = du^2 + 4dudv + 4dv^2\,; \\ (c)\quad ds^2 = du^2 - 4dudv + 6dv^2\,; & (d)\quad ds^2 = du^2 + 4dudv - 2dv^2\,; \end{array}$$

17. Hallar bajo qué ángulo se cortan las líneas $u + v = 1$ y $u - v = 1$ sobre el helicoide descrito por $\mathbb{X}(u, v) = (u\cos v, u\sin v, v)$, con $0 < u < \infty$, $-\infty < v < \infty$.

18. Consideremos el cono descrito por $\mathbb{X}(u, v) = (u\cos v, u\sin v, u)$, con $u > 0$ y $0 < v < 2\pi$. Consideremos las curvas $v = u^2 + \alpha$, donde $\alpha \in \mathbb{R}$. Hállese la familia de curvas ortogonales.

19. Sea S una superficie de revolución y sea $\boldsymbol{\gamma}(s)$ su curva generadora (parametrizada por longitud de arco). Llamemos $\rho(s)$ a la distancia de $\boldsymbol{\gamma}(s)$ al eje de rotación.

a) Verifíquese que área de $S = 2\pi\int_0^L \rho(s)ds$, donde L es la longitud de la curva.

b) Calcular, utilizando el apartado *a*), el área de una esfera, de un cono y de un toro.

20. Verificar que si $\alpha > 0$, $\gamma > 0$ y $\beta^2 < \alpha\gamma$, entonces $ds^2 = \alpha du^2 + 2\beta dudv + \gamma dv^2$ es la forma cuadrática asociada a una parametrización del plano.