Matemática Discreta
Segundo de Ingeniería Informática UAM
Curso 2005-2006

Hoja 2 (Combinatoria)

1. Calcula

a) el número de palabras de 3 letras del alfabeto $\{A, B, \ldots, J\}$ que tienen todas sus letras distintas y en orden alfabético;
b) el número de palabras de 8 letras del alfabeto $\{A, B, C\}$ que contienen tres Aes;
c) el número de distribuciones de 5 bolas distintas en 3 cajas distintas si no puede quedar ninguna caja vacía;
d) el número de formas de repartir 40 cartas iguales entre 4 personas;
e) el número de maneras de distribuir 5 bolas rojas y 5 bolas azules en 3 cajas distintas;
f) el número de maneras de distribuir 5 bolas idénticas en 3 cajas distintas si cada caja tiene que tener al menos una bola.
g) el número de maneras de distribuir una clase de 25 estudiantes en grupos de 5;

2. De un conjunto de 5 pares de zapatos se escogen 3 zapatos al azar. Calcula la probabilidad de que 2 de ellos sean de la misma pareja.

3. Calcula el número de permutaciones de $(AABBCCDDEE)$ tales que:

- las 2 Aes aparecen juntas;
- las 2 Aes aparecen separadas;
- las cuatro vocales están separadas.

4. Queremos fabricar tarjetas de identificación poniendo símbolos en las casillas de una matriz 3×3. Los símbolos deben ser números enteros mayores que 0 y se exige además que la suma de los símbolos de cada fila sea 100. ¿Cuántas tarjetas distintas se pueden hacer?

5. ¿De cuántas formas se puede extraer del conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ un conjunto de r números de forma que no haya dos consecutivos?

6. Consideramos el conjunto de símbolos $X = \{1, 2, 3, \ldots, 50\}$. Diremos que un subconjunto A de X está *separado* si la diferencia entre cualesquiera dos de sus elementos es al menos tres unidades. Por ejemplo, $\{10, 15, 17, 40\}$ no está separado, mientras que $\{10, 15, 18, 40\}$ sí lo está. ¿Cuántos subconjuntos separados distintos de cinco elementos se pueden formar con los elementos de X?

7. ¿De cuántas formas se puede confeccionar una lista de 12 términos con las letras a, b y c de forma que aparezcan dos aes, dos bes y ocho ces, y además cada a y cada b tengan una c a ambos lados?

8. Hállense los cardinales de los conjuntos siguientes:

$$\begin{aligned} X &= \{(A,B) : A, B \subset \{1,\dots,n\},\ A \cap B = \emptyset\} \\ Y &= \{(A,B) : A, B \subset \{1,\dots,n\},\ A \subset B\} \\ Z &= \{(A,B) : A, B \subset \{1,\dots,n\},\ A \subsetneq B\} \end{aligned}$$

9. Una rana saltarina está situada en la casilla inferior izquierda de un tablero de ajedrez de 8×8, con la intención de llegar a la casilla opuesta en cuatro saltos, avanzando en cada uno de ellos hacia arriba y hacia la derecha. ¿De cuántas maneras lo puede hacer?

10. Compruébese que

$$\max_{j=0,\dots,2m} \left\{ \binom{2m}{j} \right\} = \binom{2m}{m}.$$

Obténgase y pruébese el resultado análogo para los coeficientes binómicos $\binom{n}{j}$, donde n es impar.

11. Pruébense, con argumentos combinatorios, las siguientes identidades:

a) $$\binom{2n}{n+1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k}\binom{n}{k+1}$$

b) $$\binom{2n}{n}^2 = \sum_{k=0}^{n} \frac{(2n)!}{(n-k)!^2\, k!^2}$$

(*Indicación*: cuenta el número de maneras de elegir dos subconjuntos de tamaño n de $\{1,\dots,2n\}$ no necesariamente disjuntos).

c) $$\binom{n+1}{k+1} = \sum_{j=0}^{n} \binom{j}{k}$$

(*Indicación*: clasifica los subconjuntos en función de su mayor elemento).