Matemática Discreta
Segundo curso del Grado en Matemáticas, UAM
Curso 2010-2011

Hoja 2

1. Pruébese la siguiente regla de recurrencia para un coeficiente trinómico:

$$\binom{n}{a,b,c} = \binom{n-1}{a-1,b,c} + \binom{n-1}{a,b-1,c} + \binom{n-1}{a,b,c-1}, \qquad \text{donde } a+b+c=n.$$

Explíquese el significado combinatorio de esta identidad.

2. Compruébese que

$$S(n,n-1) = \binom{n}{2} \quad \text{y que} \quad S(n,n-2) = \binom{n}{3} + \frac{1}{2}\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}.$$

Hállese una fórmula análoga para $S(n,n-3)$.

Por otro lado, sabemos que

$$S(n,2) = \frac{2^n-2}{2}.$$

Hállese una fórmula para $S(n,3)$.

3. Pruébese que

$$S(n+1,m+1) = \sum_{k=m}^{n} \binom{n}{k} S(k,m).$$

4. El *número de Bell* $B(n)$ cuenta el número de particiones de $\{1,\dots,n\}$ en bloques no vacíos:

$$B(n) = \sum_{k=1}^{n} S(n,k).$$

Compruébese que, si definimos $B(0)=1$, se verifica la siguiente relación de recurrencia:

$$B(n) = \sum_{j=1}^{n} \binom{n-1}{j-1} B(n-j), \quad \text{esto es,} \quad B(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} B(k) \qquad \text{para cada } n \geq 1$$

5. Consideremos ahora el número de particiones del conjunto $\{1,\dots,n\}$ en bloques no vacíos, de manera que los bloques van numerados (el orden dentro de los bloques sigue siendo irrelevante). A este número lo llamaremos n-ésimo *número de Bell ordenado*, $\widetilde{B}(n)$. Compruébese que

$$\widetilde{B}(n) = \sum_{k=1}^{n} k!\, S(n,k).$$

Pruébese que, si definimos $\widetilde{B}(0)=1$, estos números verifican la siguiente relación de recurrencia:

$$\widetilde{B}(n) = \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} \widetilde{B}(n-j) \text{ para cada } n \geq 1, \quad \text{o, lo que es lo mismo,} \quad \widetilde{B}(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \widetilde{B}(k).$$

6. Consideremos los conjuntos $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ y $B = \{1, 2, \ldots, m\}$, donde $m \geq n$.

(a) Dado un k fijo entre 1 y m, calcula el número α_k de funciones de A en B cuyo conjunto imagen tiene exactamente k elementos.

(b) Calcula el valor de la suma $\sum_{k=1}^{m} \alpha_k$.

7. Durante los próximos $2n$ días, una persona va a ir visitando ciudades (una por día). Hay n ciudades. ¿Cuántos itinerarios distintos podrá diseñar si quiere visitarlas todas?

8. Una colección consta de 10 cromos distintos. Durante 20 días vamos a ir cada mañana al kiosko a comprar uno. ¿Cuál es la probabilidad de que completemos la colección justamente (y no antes) el último día? (*Nota:* suponemos que los cromos aparecen con la misma probabilidad).

9. Un grupo de 100 personas hacen un examen tipo test que consta de 150 preguntas. A la vista de los resultados obtenidos por cada uno de ellos (entre 0 y 150 puntos), hacemos un ranking de los candidatos: una primera categoría para los de máxima puntuación, una segunda para los que tengan la siguiente puntuación, etc. Nótese que puede haber varios candidatos en la misma categoría. ¿Cuántas posibles clasificaciones finales de éstas podrá haber?

10. Sea n un entero positivo que es producto de m primos diferentes. ¿De cuántas maneras podemos escribir n como producto de k enteros de la forma

$$n = n_1 \times \cdots \times n_k\,, \qquad (\text{con } 1 < n_1 < \cdots < n_k)\ ?$$