Estadística I
Grado en Matemáticas, UAM, 2014-2015

Hoja 2. Simulación y cambios de variable

Métodos de simulación

1. Diseña un método de simulación para una variable X que siga una Poisson de parámetro $\lambda > 0$. Una tal variable toma valores $0, 1, 2, \ldots$, con probabilidades

$$\mathbf{P}(X = j) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^j}{j!} \qquad j \geq 0.$$

Observa que X toma un conjunto infinito de valores.

2. Diseña un método de simulación de una variable X que siga una geométrica de parámetro p, $0 < p < 1$. Esto es, la variable X toma los valores $1, 2, \ldots$ con probabilidades

$$\mathbf{P}(X = j) = p(1-p)^{j-1} \qquad j \geq 1.$$

Haz explícita la manera de transformar valores u de la uniforme en valores x de X. (Indicación: obtener una expresión para la función de distribución $F_X(x) = \mathbf{P}(X \leq x)$).

3. Describe el algoritmo de simulación de una variable X triangular en $[a, b]$, con moda en un punto c, $a < c < b$.

4. (Extra) Diseña un método para generar permutaciones de los elementos del conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$.

---

5. Prueba que, si $x \geq 0$,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^\infty e^{-t^2/2}dt < \frac{1}{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2}.$$

(Sugerencia: en el rango de integración, $t > x$; añade un factor t/x y luego integra). Deduce una estimación para el valor de $1 - \Phi(x)$.

Cambios de variable

6. Sea X una variable $\textsc{Exp}(\lambda)$, con $\lambda > 0$. Es decir, $f_X(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, para $t \geq 0$, y $f_X(t) = 0$ para $t < 0$. Halla la función de densidad de la variable $Y = 1/X$.

7. a) Sean X e Y dos variables aleatorias independientes, que siguen, ambas, una distribución uniforme en el conjunto $\{0, 1, \ldots, n-1\}$. Es decir, cada variable toma cada uno de esos valores con probabilidad $1/n$. Calcula los valores y probabilidades de la variable $X + Y$.

b) La misma pregunta, pero ahora interpretamos la suma $X + Y$ como suma módulo n.

c) Sean ahora X e Y variables independientes y uniformes en $[0, 1]$. Calcula la función de densidad de $X + Y$.

8. Sea (X, Y) un par de variables aleatorias independientes, ambas uniformes en $(0, 1)$. Definimos

$$U = X + Y \qquad \text{y} \qquad V = X - Y.$$

Halla $f_{U,V}(u, v)$. Calcula $\mathbf{P}(U < 1)$, $\mathbf{P}(V > 0)$ y $\mathbf{P}(U < 1, V > 0)$.