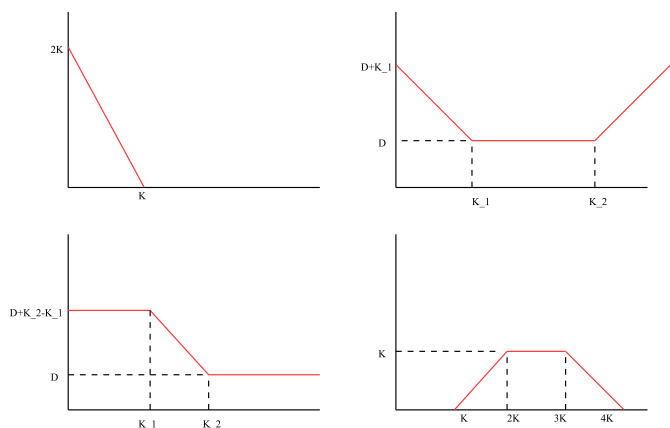


Economía y finanzas matemáticas
Cuarto curso, licenciatura en Matemáticas, UAM, 2011-2012

Hoja 2

1. a) El precio de la onza de oro está hoy a 1300 euros. En el mercado se cotizan contratos forward a 1 año con precio de compraventa 1350 euros (coste hoy, 0). Suponiendo que se puede prestar/pedir prestado a un tipo (anual, continuo) del 3 %, diseña una oportunidad de arbitraje.
b) Tomamos en consideración ahora los costes de almacenamiento del oro. Digamos que D es el coste (en dinero de hoy) de almacenar una onza de oro durante un año. ¿A partir de qué valor de D desaparece la oportunidad de arbitraje anterior?
2. La cotización hoy de una cierta acción es $S_0 = 100$ euros. El tipo anual (continuo) es 3 %.
a) Entramos en un contrato forward a 6 meses. ¿Cuál debe ser el precio F_0 que se deberá fijar para la compraventa si queremos que el contrato cueste hoy 0?
b) Comprueba que si F_0 fuera 103, habría una oportunidad de arbitraje. Diseñala.
c) Repite los cálculos del apartado a) si sabemos que se pagará un dividendo de 5 euros por acción dentro de 3 meses.
3. Supongamos que los bonos cupón cero de nominal 100 a plazos 1 año y 1 año y seis meses se cotizan hoy a 94 y 92 euros respectivamente.
a) En un FRA a un año para el periodo 1 año $\rightarrow$ 1.5 años, una parte paga un tipo de interés fijo K , y la otra el tipo simple a seis meses que se fije dentro de un año. Calcula el tipo K que hace que este FRA cueste 0 hoy.
b) Comprueba que si fuera $K = 4,5\%$, habría una oportunidad de arbitraje. Descríbela.
4. Consideremos una call y una put con el mismo strike K y el mismo vencimiento T . ¿Cuál es el K que hace que ambas opciones tengan hoy el mismo precio?
5. Considera una call de vencimiento $T = 1$ año y strike $K = 90$ sobre un subyacente que hoy cuesta $S_0 = 100$ y que pagará un dividendo de 5 euros dentro de 6 meses. El tipo de interés continuo es del 3 % anual.
a) Halla una cota inferior para el precio hoy de la call.
b) Si el precio de la call hoy es de 10 euros, ¿cuál deberá ser el precio de la put (con mismo strike y vencimiento) para que no se creen oportunidades de arbitraje?
c) Si la call cuesta hoy 10 euros y la put 4 euros, diseña una oportunidad de arbitraje.
6. En tu cartera tienes un contrato forward comprado en el que se establece un precio de compraventa K_1 en tiempo T para una determinada acción; y un forward vendido, con las mismas características, salvo que el precio de compraventa es K_2 (con $K_2 > K_1$). ¿Cuál es el perfil de posibles flujos de tu cartera?
7. Describe las carteras de instrumentos (calls, puts, dinero, forwards, etc.) que dan lugar en tiempo T a los flujos que se recogen en las figuras (r es el tipo anual continuo):



Para los ejercicios siguientes, usaremos la siguiente curva cupón cero (o de descuentos):

año 0	año 1	año 2	año 3	año 4	año 5	año 6	año 7	año 8	año 9	año 10
100 %	98,97 %	98,50 %	97,55 %	95,72 %	94,77 %	93,13 %	91,74 %	89,99 %	89,74 %	88,41 %

Si se necesitan descuentos en fechas intermedias, puedes calcularlos por interpolación lineal.

8. a) Considera el siguiente bono de nominal 100 que paga cupones semestrales ($\Delta t = 0.5$) variables, de la siguiente forma:

- dentro de 6 meses, se fija el tipo simple (Euribor) a 6 meses, que denotamos por $R_s(0.5, 1)$, y al final del periodo (en tiempo 1 año) se paga un cupón $R_s(0.5, 1) \cdot \Delta t \cdot 100$.
- En tiempo 1 año se fija el tipo simple a 6 meses más, $R_s(1, 1.5)$, y en tiempo 1 año y 6 meses se paga cupón de $R_s(1, 1.5) \cdot \Delta t \cdot 100$.
- En tiempo 2 años se paga cupón de $R_s(1.5, 2) \cdot \Delta t \cdot 100$, donde $R_s(1.5, 2)$ es el tipo simple a 6 meses fijado en tiempo 1.5, y, además, se devuelve el nominal.

Observa que el montante de estos flujos es incierto, porque no conocemos hoy los tipos Euribor que se fijarán en el futuro.

Para valorarlo, contratamos hoy (a precio 0) la siguiente carteras de FRAs:

- un FRA para el periodo $0.5 \rightarrow 1$ con precio de compraventa $F_s(0, 0.5, 1)$ (el tipo forward simple visto hoy para ese periodo);
- un FRA para el periodo $1 \rightarrow 1.5$ con precio de compraventa $F_s(0, 1, 1.5)$;
- un FRA para el periodo $1.5 \rightarrow 2$ con precio de compraventa $F_s(0, 1.5, 2)$.

Comprueba que el bono anterior, junto con esta cartera de FRAs, tiene los mismos flujos que un bono con cupones fijos. Escribe con detalle los flujos de este nuevo bono y valóralo usando la curva cupón cero. Deduce el precio del bono original.

b) Generaliza el argumento anterior para un bono a 10 años de nominal M con cupones semestrales variables, que devuelve nominal a vencimiento. Aquí, hay un primer cupón que se paga en tiempo 6 meses según el tipo simple a 6 meses que observemos hoy. El resto de los cupones (del año en adelante) se pagan según la prescripción del apartado anterior.

9. Un **swap** es un contrato entre dos partes que intercambian intereses sobre un cierto nominal hasta un cierto plazo: una parte paga intereses con un tipo fijo, la otra partes paga intereses según un tipo variable (Euribor). En principio, no hay intercambio de nominales.

a) Considera el siguiente swap con nominal 100:

- en tiempo 1 año se fijará el tipo simple a 1 año $R_s(1, 2)$. En tiempo 2, una parte paga $100 \cdot R_s(1, 2)$, la otra parte paga $100 \cdot K$ (donde K es un tipo fijo).
- En tiempo 2 año se fijará el tipo simple a 1 año $R_s(2, 3)$. En tiempo 3, una parte paga $100 \cdot R_s(2, 3)$, la otra parte paga $100 \cdot K$.

Valora los pagos de la parte que paga interés fijo (la “pata fija”). Contratando los FRAs adecuados, valora también la “pata variable”. Finalmente, halla el valor de K que hace que las dos patas tengan el mismo precio hoy.

b) Generaliza el argumento anterior para un swap con fechas $(t_0, t_1, \dots, t_N)$ de nominal M . Aquí, t_0 es la primera fecha (futura) de fijación de Euribor. Los instantes de tiempo t_k están todos equiespaciados una cantidad Δt . En cada tiempo t_k , para $k = 0, \dots, N-1$, se fija el tipo simple a plazo Δt (que denotaríamos por $R_s(t_k, t_{k+1})$). En tiempo t_{k+1} se intercambian flujos $K \cdot M \cdot \Delta t$ y $R_s(t_k, t_{k+1}) \cdot M \cdot \Delta t$.

Valora la pata fija y la pata variable (contratando la cadena de FRAs adecuada). Halla el tipo K que hace que este swap valga hoy 0. Este tipo de interés de “equilibrio” es conocido como el **tipo swap** (para la secuencia de tiempos $t_0, t_1, \dots, t_N$).

c) Comprueba que el tipo swap definido en el apartado anterior es un promedio ponderado de los tipos forward.