

**Conjuntos y Números**  
**Primero de Matemáticas, Universidad Autónoma de Madrid**  
**Curso 2002-2003**

**Hoja 2**

**Funciones**

1. Consideremos los números primos:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47,  
53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, ...

Sea  $\pi(x)$  = número de primos menores o iguales que  $x$  (por ejemplo:  $\pi(1) = 0$ ,  $\pi(7.5) = 4$ ,  $\pi(20) = 8$ , ...). Calcula los valores de  $\pi(40)$ ,  $\pi(65)$ ,  $\pi(200)$ .

2. Haz una tabla de primos hasta 1000 y comprueba en ella la propiedad:

$$\pi(2x) - \pi(x) \geq 1, \quad \text{si } x \geq 1.$$

3. A cada entero positivo  $n$  le asignamos el número de sus divisores:  $d(n)$ . Así:

$$d(1) = 1, d(2) = 2, d(3) = 2, d(4) = 3, d(10) = 4, d(30) = 8, \dots$$

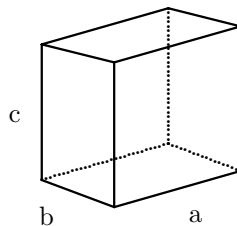
¿Cómo se llaman los números cuya imagen es 2? ¿Podrías describir a los números  $n$  tales que  $d(n) = 4$ ?

4. Definimos  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  como  $f(n)$  = resto obtenido al dividir  $n$  por 7. ¿Quién es el conjunto  $\text{Im}(f) = f(\mathbb{Z})$ ? (Obsérvese que  $f(m) = f(n)$  si y solo si  $m - n$  es un múltiplo de 7).

5. Consideremos la fórmula

$$V = a \cdot b \cdot c$$

que a cada terna de números reales positivos  $(a, b, c)$  le hace corresponder su producto  $V$ . Si  $a, b, c$  son, respectivamente, el largo, ancho y alto de un prisma recto rectangular, entonces  $V$  es el volumen



¿Es inyectiva?, ¿es sobreyectiva? (El conjunto de llegada se considera igual a los reales positivos).

6. Sea  $f : \{\text{cuadros del Museo del Prado}\} \rightarrow \{\text{pintores}\}$ , de manera que  $f(x)$  = autor del cuadro  $x$ . Calcula

$f(\text{Meninas}), f(\text{Jardín de las Delicias}), f(\text{Tres gracias}), f(\text{Lavatorio}),$   
 $f(\text{Carro del heno}), f(\text{Familia de Carlos IV}), f(\text{Retrato de Jovellanos}), \dots$

¿Es  $f$  una aplicación inyectiva? ¿Es  $f$  sobreyectiva? Dar ejemplos fehacientes.

7. Dadas las funciones:

- a)  $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{x}.$
- b)  $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x - \sqrt{2}.$
- c)  $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = 1 - x^2.$
- d)  $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = 7x.$
- e)  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = 7y.$

Estudiar si son inyectivas, sobreyectivas o biyectivas.

8. Calcula el dominio de definición y el conjunto imagen de las funciones siguientes:

- i)  $f(x) = (x - 1)^2;$
- ii)  $g(x) = 2x - 1;$
- iii)  $h(x) = \frac{1}{x^2 - 1};$
- iv)  $j(x) = \sqrt{1 + 1/x}.$

9. ¿Puedes encontrar una función polinómica sencilla que tome los valores siguientes?

- a) 

$x$	...	-2	-1	0	1	2	3	...
$f(x)$	...	-5	-3	-1	1	3	5	...
- b) 

$x$	...	-2	-1	0	1	2	3	...
$f(x)$	...	-8	-1	0	1	8	27	...

10. Sea  $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$  definida por  $f(x)$  = suma de las cifras de  $x$  en base 10. Ejemplos:  $f(12) = 3, f(347) = 14, \dots$ . ¿Es  $f$  inyectiva? ¿Es sobreyectiva? ¿Cuáles son los  $x$  tales que  $f(x) = x$ ?

11. Representa gráficamente las funciones:

- i) Identidad:  $y = x.$
- ii) Función cuadrática:  $y = x^2.$
- iii) Función cúbica:  $y = x^3.$
- iv) Valor absoluto:  $y = |x| = \max\{x, -x\}.$
- v) Parte entera:  $y = [x] =$  mayor entero menor o igual que  $x.$
- vi) Parte fraccionaria:  $y = \{x\} = x - [x].$
- vii) Proporcionalidad inversa:  $y = \frac{1}{x}.$

12. Dada una función  $f : D \longrightarrow E$ , definamos para cada subconjunto  $A \subset E$  la imagen inversa:

$$f^{-1}(A) = \{x \in D \mid f(x) \in A\}.$$

¿Qué relaciones existen entre  $f^{-1}(A), f^{-1}(B), f^{-1}(A \cup B)$  y  $f^{-1}(A \cap B)$ ?