Matemática Discreta
Tercero de Matemáticas
Curso 2001-2002

Hoja 2

1. Probar las siguientes identidades:

$$a) \qquad \sum_{k=0}^{n} \frac{(2n)!}{(n-k)!^2\, k!^2} = \binom{2n}{n}^2 ,$$

$$b) \qquad \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k}\binom{n}{k+1} = \binom{2n}{n+1} .$$

2. ¿De cuántas formas se pueden extraer del conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$ un conjunto de r números de forma que no haya dos consecutivos?

3. Sea $D_n(k)$ el número de permutaciones de $\{1, 2, \dots, n\}$ que dejan fijos exactamente a k elementos de entre $\{1, 2, \dots, n\}$. Probar que $D_n(k) = \binom{n}{k} D_{n-k}$, donde D_j es el número de desbarajustes de j elementos. Si definimos $D_0 = 1$, dedúzcase que $\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} D_j = n!$.

4. Probar, usando el principio de inclusión/exclusión que

$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k} = 0 .$$

Sugerencia: Sea $X = \{1, \dots n\}$ y sea A_j la colección de subconjuntos de X que tienen m elementos uno de los cuales es j.

5. Probar la identidad

$$S(n+1, m+1) = \sum_{k=m}^{n} \binom{n}{k} S(k, m) .$$

6. Llamemos B_n, el n-ésimo número de Bell, al número total de particiones del conjunto $\{1, \dots n\}$. Esto es, $B_n = \sum_{k=1}^{n} S(n, k)$. Probar la identidad

$$B_{n+1} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} B_k .$$

7. Demostrar la identidad $S(n, k) = \dfrac{1}{k!} \displaystyle\sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n$.

Utilizar esta identidad para probar la identidad

$$B_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!} .$$

8. Hallar el número de maneras de repartir n libros en k cajas de tal manera que todas las cajas tengan algún libro si (a) los libros son distintos y las cajas iguales; (b) los libros son iguales y las cajas distintas.

9. Hallar el número de 10-listas formadas por los símbolos $\{0,1,2\}$ que difieren, a lo más, en 3 posiciones de la lista $(0,1,2,1,2,0,0,1,2,2)$.

10. ¿De cuántas maneras diferentes podemos distribuir n bolas rojas y n bolas blancas en k cajas numeradas?

11. Se quiere fabricar tarjetas de identificación poniendo símbolos en las casillas de una matriz 3×3. En las filas pueden repetirse los símbolos pero los tres símbolos de cada columna han de ser distintos. ¿Cuántos símbolos son necesarios si que remos que haya por lo menos 10^9 tarjetas distintas?

12. En una zapatería se revuelven n pares de zapatos.

(a) ¿De cuántas maneras se pueden emparejar de nuevo los n pares de zapatos si respetamos que cada par esté formado por un zapato derecho y otro izquierdo?

(b) ¿Y si no respetamos que haya un zapato de cada pie? Simplificar la expresión obtenida.

13. Sea n un entero positivo que es producto de m primos diferentes. ¿De cuántas maneras podemos escribir n como producto de k enteros de la forma $n = n_1 \cdots n_k$, con $1 < n_1 < \cdots < n_k$?

14. Sea $P_{2n} = \{p(X) \in \mathbb{Z}[X]$ de grado $2n$ con coeficientes 0 ó $1\}$.

(a) Hallar el número de polinomios de P_{2n} que satisfacen $p(1) = p(-1)$.

(b) Hallar el número de polinomios de P_{2n} que satisfacen $p(-1) = 0$ y simplificar la expresión obtenida.

15. * Hallar el número de funciones no decrecientes del conjunto $\{1,\ldots,n\}$ en sí mismo. ¿Cuántas de estas funciones satisfacen $f(k) \leq k$ para todo $1 \leq k \leq n$?

16. Aproximadamente, en el 50% de las ocasiones aparecen dos números consecutivos en la combinación ganadora de la lotería primitiva (6 números de un total de 49). ¿Es exactamente 1/2 la probabilidad de que esto ocurra?

17. ¿De cuántas maneras podemos seleccionar tres números distintos en el conjunto $\{1,2,\ldots,300\}$ de tal manera que su suma sea un múltiplo de 3?

18. Hallar el número medio de puntos fijos en las permutaciones de n elementos.

19. Sea $z(n,k)$ el número de permutaciones de n elementos que tienen exactamente k ciclos. Demostrar que

$$x(x+1)\cdots(x+n-1) = \sum_{k=1}^{n} z(n,k)x^k \,.$$

20. Los números de Stirling de primera especie se definen de la forma $s(n,k) = (-1)^{n-k}z(n,k)$. Demostrar que

$$x(x-1)\cdots(x-n+1) = \sum_{k=1}^{n} s(n,k)x^k \,.$$

21. Sea $p_k(n)$ el número de particiones de n en k partes (representaciones de n como suma de k enteros positivos, donde el orden de los sumandos es irrelevante).

a) Demostrar que, para todo $k \geq 1$,

$$p_k(n) \sim \frac{n^{k-1}}{k!\,(k-1)!} \,.$$

b) Demostrar que $p_k(n) = \sum_{j \leq k} p_j(n-k)$.

c) Demostrar que si $k > 1$, $p_k(n) = p_{k-1}(n-1) + p_k(n-k)$.