Hoja 2: Sucesiones

1.- Estudiar el límite de las sucesiones cuyos términos generales vienen dados por

(a) $a_n = \dfrac{n^2}{n+2}$ (b) $a_n = \dfrac{n^3}{n^3+2n+1}$ (c) $a_n = \dfrac{n}{n^2-n-4}$

(d) $a_n = \dfrac{\sqrt{2n^2-1}}{n+2}$ (e) $a_n = \dfrac{\sqrt{n^3+2n}+n}{n^2+2}$ (f) $a_n = \dfrac{\sqrt{n+1}+n^2}{\sqrt{n+2}}$

(g) $a_n = \dfrac{(-1)^n n^2}{n^2+2}$ (h) $a_n = \dfrac{n+(-1)^n}{n}$ (i) $a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$

(j) $a_n = \left(\frac{5}{3}\right)^n$ (k) $a_n = \dfrac{2^n}{4^n+1}$ (l) $a_n = \dfrac{3^n+(-2)^n}{3^{n+1}+(-2)^{n+1}}$

(m) $a_n = \dfrac{n}{n+1} - \dfrac{n+1}{n}$ (n) $a_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ (ñ) $a_n = \dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2}$

2.- Calcula el valor de

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} .$$

(Indicación: utiliza la identidad $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$).

3.- Calcula

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n^2+1} + \frac{n+2}{n^2+2} + \cdots + \frac{n+n}{n^2+n} \right).$$

4.- Sea $r > 1$. La sucesión (a_n) viene dada por

$$a_1 = \sqrt{r} \qquad \text{y} \qquad a_n = \sqrt{r \cdot a_{n-1}} \quad \text{para cada } n \geq 2.$$

Prueba que la sucesión (a_n) es monótona creciente y acotada. Halla su límite.

5.- Sea (a_n) una sucesión de números reales definida por $a_{n+1} = \sqrt{2\,a_n+3}$ para cada $n \geq 1$. Sabemos además que $a_1 > -\frac{3}{2}$.
Demuestra que la sucesión converge y calcula su límite. (Sugerencia: distinguir los casos $a_1 \geq 3$ y $a_1 < 3$).

6.- Sea $a_1 = 1$. Definimos las siguientes sucesiones por recurrencia:

(a) $a_{n+1} = \dfrac{1}{4}a_n$, (b) $a_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}a_n$, (c) $a_{n+1} = \dfrac{n}{n+1}a_n$, (d) $a_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{2}a_n$.

Prueba que cada una de ellas es acotada y monótona. Halla los correspondientes límites.

7.- Se define recurrentemente la sucesión $a_1 = r > 0$ y $a_n = a_{n-1} + \frac{1}{a_{n-1}}$. ¿Es convergente la sucesión?

8.- Demuestra que si $A \subset \mathbb{R}$ está acotado superiormente, existe una sucesión (a_n) con $a_n \in A$ y tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup A$.

9.- a) Demuestra que la sucesión

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

es monótona creciente y que está acotada superiormente. Por consiguiente, tiene un límite, que denotamos por e. Indicación: usa la fórmula del binomio de Newton,

$$(n+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} n^k, \quad \text{donde} \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{y} \quad 0! = 1.$$

b) Demuestra que si $a_n \to \infty$ cuando $n \to \infty$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e, \qquad \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = \frac{1}{e}.$$

10.- Calcula, si existen, los límites de las sucesiones que tienen como término general

$$a_n = \left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)^{2n^2-3}, \quad b_n = \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{2n^2+3}, \quad c_n = a_n + \frac{1}{b_n}.$$

11.- a) Prueba, por inducción, que

$$2^{n-1} n! \le n^n \le e^{n-1} n! \qquad \text{para cada } n \ge 1.$$

(Indicación: fórmula del binomio de Newton).

b) Utiliza lo anterior para probar que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} (n!)^{\frac{1}{n}} = \infty.$$

12.- Halla los siguientes límites:

a) $\lim_{n\to\infty} (n^3 - 1)^{\frac{1}{3n}}$

b) $\lim_{n\to\infty} \left[n\left((n+1)^{\frac{1}{2}} - n^{\frac{1}{2}}\right)\right]$.

c) $\lim_{n\to\infty} \left[n\left((n+1)^{\frac{1}{3}} - n^{\frac{1}{3}}\right)\right]$.

d) $\lim_{n\to\infty} \left[n\left((n+1)^{\frac{1}{n}} - n^{\frac{1}{n}}\right)\right]$.

13.- Interpreta las expresiones siguientes como el límite de una sucesión definida de forma recurrente:

(a) $\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots}}}$ (b) (*) $1 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{1+\cdots}}$, (c) (*) $2 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{2+\cdots}}$.

Prueba que esos límites existen y calcula su valor numérico.

14.- La sucesión de término general $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ cumple que, dado $\varepsilon > 0$, existe n_0 tal que $|a_{n+1} - a_n| < \varepsilon$ para $n > n_0$. Demuestra que, sin embargo, la sucesión no es de Cauchy.