1) Estudiar si los términos generales que se indican dan lugar a sucesiones convergentes y en caso afirmativo hallar su límite.

a) $a_n = \dfrac{3n^4-2}{n^4+2n^2+2}$, *b)* $a_n = \sqrt{n^2+1}-n$, *c)* $a_n = n\sqrt{n^2+1}-n^2$,

d) $a_n = \dfrac{4^n}{5^n+6^n}$, *e)* $a_n = \dfrac{6^n}{5^n+(-6)^n}$, *f)* $a_n = \dfrac{\sqrt{2n^6+1}-1}{n^3+n^2+1}$.

2) Dar en cada apartado un ejemplo de una sucesión que tenga las propiedades que se afirman o explicar por qué no es posible construirla.

a) $|a_n|$ es monótona y acotada y a_n no converge.
b) b_{n+1}/b_n converge pero b_n no converge.
c) c_n es monótona y positiva pero $c_n/(2+c_n)$ no converge.
d) $d_n^2-2d_n$ converge pero d_n no converge.

3) Consideremos la sucesión $a_{n+1}=\sqrt{2a_n}$ con $a_1=1$.
a) Probar por inducción que $a_n<2$.
b) Justificar que a_n es monótona creciente y hallar su límite.
c) Una forma alternativa de resolver los apartados anteriores es calcular una fórmula exacta para a_n. Intentar hallarla.

4) El ejercicio anterior da sentido a la expresión $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\dots}}}$ que formalmente es el resultado de iterar indefinidamente la sucesión allí indicada y por tanto se le debe asignar el valor de su límite.

Construyendo sucesiones convergentes adecuadas hallar el valor que habría que asignar a las expresiones

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\dots}}} \qquad \text{y} \qquad \sqrt[3]{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{2}{3}+\dots}}}$$

y comprobar con una calculadora que el resultado es coherente con tomar unos cuantos términos de ellas.

5) Sean a_n y b_n dos sucesiones acotadas superiormente y A y B sus respectivos supremos. Consideremos también $c_n=a_n+b_n$ y llamemos C a su supremo.
a) ¿Se cumple siempre $A+B\geq C$?
b) ¿Se cumple $A+B=C$ si a_n y b_n son crecientes?
c) ¿Se cumple siempre $A+B=C$?

6) Fijado $1 < t \leq 4$ consideramos la sucesión recurrente dada por $x_{n+1} = \frac{1}{2}\big(x_n + \frac{t}{x_n}\big)$ con $x_1 = 2$.

a) Probar que esta sucesión está acotada inferiormente por $\sqrt{t}$ y superiormente por 2. *Indicación*: $(a+b)^2 \geq 4ab$ para $a, b \geq 0$.

b) Demostrar que es monótona decreciente.

c) Deducir que $\lim x_n = \sqrt{t}$.

7) Utilizando la relación $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$ dar una fórmula exacta sencilla para las sumas parciales de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ y utilizarla para averiguar a qué valor converge esta serie.

8) Consideremos la serie geométrica $S = \sum_{n=1}^{\infty} x^n$. ¿Para qué valores de x converge? Deducir para ellos que $S = x/(1-x)$ usando la relación $S_{n+1} = xS_n + x$ entre las sumas parciales.

9) Decidir si las siguiente afirmaciones son verdaderas, dando una pequeña explicación, o falsas, dando un contrejemplo.

a) Si $a_n > 0$ y $\sum a_n$ converge entonces $\sum a_n^2$ converge.

b) Si $a_n > 0$ y $\sum a_n$ converge entonces $\sum \frac{1}{a_n}$ no converge.

c) Si $\lim a_n = 0$ entonces $\sum (-1)^n a_n$ converge.

d) Si $a_n > 0$ y a_n es monótona y no está acotada entonces $\sum a_n^{-n}$ converge.

e) Si $a_n > 0$ entonces $\sum \big(\frac{a_n}{2a_n+1}\big)^n$ converge.

10) Estudiar si las series siguientes son convergentes. Los sumatorios se sobreentienden sobre $n \geq 1$.

$$a)\ \sum \frac{n^2+1}{n2^n}, \qquad b)\ \sum \frac{2^{\sqrt{n}}}{n^n}, \qquad c)\ \sum (-1)^n \frac{n^2+n-6}{n^4+1}, \qquad d)\ \sum \frac{n^2-6}{n^3+1},$$

$$e)\ \sum \big(\sqrt{n^4+1} - n^2\big), \qquad f)\ \sum \frac{(n!)^2}{(2n)!}, \qquad g)\ \sum \big(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\big)^2, \qquad h)\ \sum \frac{n!}{n^n}.$$

11) La sucesión de Fibonacci está definida por $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ con $F_1 = F_2 = 1$.

a) Estudiar si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} F_{2n}^{-1/2010}$ converge.

b) Sabiendo que $a_n = F_{n+1}/F_n$ es una sucesión convergente hallar su límite. *Indicación*: ¿Qué relación hay entre a_n y a_{n+1}?

Nota: La convergencia de a_n se sigue de que tanto a_{2n} como a_{2n+1} son sucesiones monótonas y acotadas.

12) Estudiar para qué valores del parámetro α son convergentes las siguientes series:

$$a)\ \sum \frac{e^{\alpha n}}{n^2+1}, \qquad b)\ \sum \big(\sqrt{n^{2\alpha}+2} - n^{\alpha}\big), \qquad c)\ \sum \binom{2n+1}{n+1}^{\alpha},$$

$$d)\ \sum \big(1 - \frac{\alpha}{n}\big)^{n^2}, \qquad e)\ \sum \big(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\big)^{\alpha}, \qquad f)\ \sum \frac{3^{\alpha n} + n^{-\alpha}}{2^{\alpha n} + n\log^2 n}.$$