**Probabilidad I**
**Segundo de Matemáticas**
**Curso 2002-2003**

**Hoja 1 (Sucesos y Probabilidades)**

**1.** Se lanzan tres dados y se suman los resultados. Obsérvese que 9 y 10 se pueden obtener, cada uno de ellos, de seis maneras distintas:

$$\begin{aligned} 9 &= 1+2+6 = 1+3+5 = 1+4+4 = 2+2+5 = 2+3+4 = 3+3+3\,, \\ 10 &= 1+3+6 = 1+4+5 = 2+2+6 = 2+3+5 = 2+4+4 = 3+3+4\,. \end{aligned}$$

Sin embargo, si hacemos el experimento correspondiente, observamos que 10 sale más frecuentemente que 9. Modelar adecuadamente el experimento aleatorio, como ya hizo Galileo, para obtener la respuesta correcta.

**2.** Sea $\Omega$ un espacio muestral. Comprobar que $\{\emptyset, \Omega\}$ es un espacio de sucesos. Comprobar que, si $A$ es un subconjunto cualquiera de $\Omega$, entonces $\{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$ es también un espacio de sucesos.

**3.** Sea $\mathcal{F}$ un espacio de sucesos. Comprobar que $\mathcal{F}$ no puede constar de exactamente seis elementos. Demostrar que, si $\Omega$ es un conjunto finito, entonces $\mathcal{F}$ ha de contener un número par de sucesos.

**4.** Lanzamos una moneda 10 veces (la probabilidad de que salga cara en cada una de estas tiradas es 1/2). Describir el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ que mejor se adapte a las siguientes situaciones: (a) lo que nos interesa es el resultado de cada lanzamiento individual; (b) sólo nos interesa el número total de caras obtenido.

**5.** Se lanza un dado $n$ veces. Construir el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ que permite describir este experimento aleatorio. Hecho esto, calcular la probabilidad del suceso "sale un número par (o cero) de seises".

**6.** Sea $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ un espacio muestral finito y consideremos el espacio de sucesos $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. Nos damos ahora unos números $p_1, \dots, p_n$ no negativos tales que $\sum_{j=1}^n p_j = 1$ y construimos la función $\mathbf{Q}$ que toma los elementos de $\mathcal{F}$ y devuelve números de $[0,1]$ de la siguiente manera: $\mathbf{Q}(\omega_j) = p_j$, para cada $j = 1, \dots, n$. Y, para un suceso $A \in \mathcal{F}$ cualquiera,

$$\mathbf{Q}(A) = \sum_{\omega_j \in A} \mathbf{Q}(\omega_j)$$

Demostrar que $\mathbf{Q}$ es una probabilidad en $(\Omega, \mathcal{F})$. ¿Y si $\mathcal{F}$ no es todo $\mathcal{P}(\Omega)$, sino un espacio de sucesos más pequeño?

**7.** Nos damos un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Comprobar las siguientes afirmaciones (en las que $A$, $B$ y $A_1 \dots, A_n$ son sucesos cualesquiera):

(a) $\mathbf{P}\Big(\bigcup_{j=1}^n A_j\Big) \le \sum_{j=1}^n \mathbf{P}(A_j)$ (desigualdad de Boole).

(b) $\mathbf{P}\Big(\bigcap_{j=1}^n A_j\Big) \ge \sum_{j=1}^n \mathbf{P}(A_j) - (n-1)$.

(c) $\min\big\{1, \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)\big\} \ge \mathbf{P}(A \cup B) \ge \max\big\{\mathbf{P}(A), \mathbf{P}(B)\big\}$.

(d) $\min\big\{\mathbf{P}(A), \mathbf{P}(B)\big\} \ge \mathbf{P}(A \cap B) \ge \max\big\{0, \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - 1\big\}$.

**8.** Disponemos de dos urnas: $U_1$ contiene $b_1$ bolas blancas y $n_1$ negras; $U_2$ tiene $b_2$ blancas y $n_2$ negras. Escogemos al azar una urna y luego extraemos una bola de ella.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída sea negra?

(b) Si hemos sacado una bola blanca, ¿cuál es la probabilidad de que hayamos seleccionado la urna $U_1$?

**9.** Tenemos dos urnas, $U_1$ (4 bolas blancas y 3 negras) y $U_2$ (con 3 blancas y 7 negras). Primero, elegimos una urna al azar y extraemos una bola de ella, que pasamos a la otra urna. Hecho esto, volvemos a sortear urnas y sacamos una bola de la urna elegida. Organizar adecuadamente toda esta información (y utilizar el ejercicio anterior) para contestar a las siguientes preguntas:

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída (en el último paso) sea negra?

(b) Si hemos sacado una bola blanca, ¿cuál es la probabilidad de que en el primer sorteo de urnas hayamos seleccionado la $U_1$?

**10.** En la temporada 2000-2001, el delantero $A$ marcó en 40 de los 100 partidos disputados por su equipo, mientras que el delantero $B$ marcó en 7 de los 30 que jugó. En la siguiente temporada, $A$ marcó en 26 de 50 partidos, mientras que $B$ marcó en 60 de 120. Comprobar que $A$ fue más efectivo en cada una de las dos temporadas. Pero, ¿qué ocurre si miramos conjuntamente (en las dos temporadas) los promedios goleadores? ¿Cómo se explica esto?

**11. La urna de Pólya**. En una urna hay $b$ bolas blancas y $a$ azules. Extraemos una bola, miramos su color, la devolvemos a la urna y añadimos otra bola de ese mismo color. El proceso se repite indefinidamente. Llamemos $B_n$ al suceso “sacamos bola blanca en la $n$-ésima extracción”.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de $B_2$ (sacar blanca en la segunda extracción)?

(b) ¿Cuál es la probabilidad de haber sacado una bola blanca en la primera extracción si es que hemos sacado blanca en la segunda?

(c) Probar que $\mathbf{P}(B_n) = \mathbf{P}(B_1)$ para cada $n \geq 1$.

(d) ¿Cuál es la probabilidad de que la primera bola extraída sea blanca suponiendo que en la $n$-ésima extracción hemos obtenido una bola blanca?

**12.** Supongamos que $A$ y $B$ son dos sucesos independientes, y que $B$ y $C$ también lo son. ¿Son $A$ y $C$ independientes en general? ¿Es $B$ independiente de $A \cup C$? ¿Es $B$ independiente de $A \cap C$?

**13.** Consideremos un espacio muestral $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ y la probabilidad dada por $\mathbf{P}(\omega_j) = 1/4$ para cada $\omega_j \in \Omega$. Comprobar que los sucesos $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 3\}$ y $C = \{1, 4\}$ son independientes dos a dos, pero que $A$, $B$ y $C$ no son sucesos independientes.

Construye un ejemplo en el que cuatro sucesos sean independientes dos a dos y tres a tres, pero no independientes entre sí.

**14.** Sea $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_p\}$, donde $p$ es un número primo; los elementos de $\Omega$ son equiprobables. Comprobar que dos sucesos $A$ y $B$ no pueden ser independientes (salvo en el caso de que o bien $A$ o bien $B$ sean todo $\Omega$ ó $\emptyset$).