Geometría II
Segundo de Matemáticas
Curso 2004-2005

Hoja 1 (Curvas)

1. Da parametrizaciones regulares que tracen los conjuntos del plano definidos por las ecuaciones siguientes. Dibuja esas trazas.

- Elipse: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$
- Hipérbola: $x^2 - 9y^2 = 1$
- Curva de Lamé: $x^4 + y^4 = 1$
- Cúbica nodal: $y^2 = x^2(x+1)$ (**Indicación:** Usa el parámetro $t = y/x$)
- Ocho de Lissajous: $y^2 = 4x^2(1-x^2)$ (**Indicación:** Usa $t = \operatorname{arc\,sen} x$)

2. Probar que si f y g son funciones diferenciables en el intervalo $(0,1)$ y verifican que

$$f(t)^2 + g(t)^2 = 1 \qquad \text{para todo } t \in (0,1),$$

entonces existe una función θ *diferenciable* tal que

$$f(t) = \cos(\theta(t)) \qquad \text{y} \qquad g(t) = \sin(\theta(t))$$

(Sugerencia: Tómese θ tal que $\theta' = fg' - gf'$ y verifíquese que, con una constante de integración adecuada, $(f(t) - \cos(\theta(t)))^2 + (g(t) - \sin(\theta(t))^2 = 0$ para todo t).

3. Sea la curva $\boldsymbol{\gamma}(t) = (ae^{bt}\cos(t), ae^{bt}\sin(t))$, $t \in \mathbb{R}$, donde $a > 0$ y $b < 0$. Pruébese que cuando $t \to \infty$, $\boldsymbol{\gamma}(t)$ tiende a $(0,0)$ describiendo una espiral (logarítmica). Y también que $\boldsymbol{\gamma}'(t) \to (0,0)$ cuando $t \to \infty$. Verifíquese que la curva tiene longitud finita:

$$\lim_{T\to\infty} \int_0^T \|\boldsymbol{\gamma}'(u)\| du < +\infty$$

4. Dibuja las siguientes curvas parametrizadas, calcula su parámetro longitud de arco y halla su curvatura escalar en función del parámetro longitud de arco.

- Catenaria: $\boldsymbol{\gamma}(t) = (t, \cosh t)$, $t \in \mathbb{R}$.
- Espiral logarítmica: $\boldsymbol{\gamma}(t) = (ae^{bt}\cos(t), ae^{bt}\operatorname{sen}(t))$, $t \in \mathbb{R}$, donde a y b son constantes ambas distintas de cero.
- Parábola semicúbica, o cuspidal: $\boldsymbol{\gamma}(t) = (\frac{1}{3}t^3, \frac{1}{2}t^2)$, $t \in \mathbb{R}$.

5. Consideramos las siguientes curvas:

- $\boldsymbol{\alpha}(t) = (\operatorname{senh} t, \cosh t, t)$, $t \in \mathbb{R}$.
- $\boldsymbol{\beta}(t) = (t, \dfrac{1}{\sqrt{2}}t^2, \dfrac{1}{3}t^3)$, $t \in \mathbb{R}$.
- $\boldsymbol{\gamma}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, \cosh t)$, $t \in \mathbb{R}$

Parametriza todas por longitud de arco. Calcula la curvatura y la torsión de las tres, y para $\boldsymbol{\alpha}$ y $\boldsymbol{\gamma}$ ponlas en función de la longitud de arco. Calcula el triedro de Frenet y el plano osculador de $\boldsymbol{\beta}$.

6. Da fórmulas para la función longitud de arco y la curvatura de una curva regular en coordenadas polares: $r = r(\theta)$, es decir, la curva es $\boldsymbol{\gamma}(\theta) = (r(\theta)\cos(\theta), r(\theta)\operatorname{sen}(\theta))$. Halla así la curvatura de la espiral logarítmica, que está dada por $r = ae^{b\theta}$.

7. Calcúlese la curvatura de una curva dada implícitamente por $F(x, y) = 0$.

8. Sea $\boldsymbol{\alpha} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una curva birregular parametrizada por longitud de arco con torsión positiva. Denotamos por $\{\mathbf{t}(s),\ \mathbf{n}(s),\ \mathbf{b}(s)\}$ su triedro de Frenet. Definimos la curva

$$\boldsymbol{\gamma}(s) = \int_0^s \mathbf{b}(u)\, du.$$

- Calcula el triedro de Frenet, la curvatura y la torsión de $\boldsymbol{\gamma}$.
- Halla una curva parametrizada por la longitud de arco que tenga $k = \dfrac{s}{1+s^2}$ y $\tau = \dfrac{\sqrt{2}}{1+s^2}$ con $s > 0$ (Indicación: puedes dejar la parametrización indicada como una integral).

9. Considérese la curva $\boldsymbol{\gamma}(t) = (\cos t, \sin t, e^t)$. Calcúlense su triedro de Frenet, $\kappa(t)$ y $\tau(t)$. Estúdiese el comportamiento de κ y τ cuando $t \to \pm\infty$.

10. Hállense todas las funciones $f(t)$ que hacen que $\boldsymbol{\gamma}(t) = (\cos t, \sin t, f(t))$ sea una curva plana.

11. Sea $T = \mu I$ $(\mu > 0)$ una homotecia en $\mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{\gamma}$ una curva regular y $\boldsymbol{\beta} = T \circ \boldsymbol{\gamma}$ la composición de $\boldsymbol{\gamma}$ y T. Halla la relación entre las curvaturas de $\boldsymbol{\gamma}$ y $\boldsymbol{\beta}$. ¿Qué ocurre si T es una transformación afín cualquiera del plano?

12. Sea $\boldsymbol{\gamma} : I \to \mathbb{R}^2$ una curva regular y $t_0 \in I$ tal que la función $\|\boldsymbol{\gamma}(t)\|$ tiene un máximo relativo en t_0. prueba que $|k(t_0)| \geq \frac{1}{\|\boldsymbol{\gamma}(t_0)\|}$, donde k es la curvatura de $\boldsymbol{\gamma}$.

13. Sea $\boldsymbol{\gamma}$ una curva y sea $v = \|\boldsymbol{\gamma}'\|$ su rapidez. Pruébese que la curvatura κ satisface

$$\kappa^2 v^4 = \|\boldsymbol{\gamma}''\|^2 - \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 .$$

14. Halla curvas planas con las siguientes curvaturas, donde s es la longitud de arco:

$$k = \frac{1}{s}, \quad s > 0\,, \qquad k = \frac{1}{\sqrt{1-s^2}}, \quad -1 < s < 1\,,$$

$$k = \frac{1}{1+s^2}\,, \qquad k = \frac{2}{1+s^2}\,, \qquad k = 2s.$$

15. Halla una curva parametrizada por la longitud de arco cuyo vector binormal es

$$\mathbf{b}(s) = (\,(3/5)\,\mathrm{sen}(s), (3/5)\cos(s), 4/5\,)\,.$$

16. Determina las curvas regulares del espacio cuyas rectas tangentes pasan por un punto fijo.

17. Determina las curvas regulares del espacio cuyos planos normales pasan por un punto fijo. En el caso de que sean birregulares ¿Qué ecuaciones satisfacen la curvatura y la torsión?

18. Determina las curvas birregulares del espacio cuyos planos osculadores pasan por un punto fijo.

19. Determina las curvas birregulares del espacio cuyas rectas normales pasan por un punto fijo.

20. Demuéstrese que la curvatura de una curva $\boldsymbol{\gamma}$ en un punto P es igual a la curvatura en P de la proyección de $\boldsymbol{\gamma}$ sobre el plano osculador en P.

21. ¿Qué curvas regulares $\boldsymbol{\gamma}$ satisfacen que $\boldsymbol{\gamma}'' = \boldsymbol{\gamma}' \times \mathbf{a}$, donde $\mathbf{a}$ es un vector fijo?

22. Demuéstrese que si una curva tiene toda su traza contenida en una bola de radio R, entonces en algún punto su curvatura es $1/R$.

23. Sea $\boldsymbol{\gamma}$ una curva plana y sea T su recta tangente en un punto P. Sea L una línea perpendicular a T en un punto Q de T a distancia d de P. Sea h la distancia en L desde Q a la curva $\boldsymbol{\gamma}$. Demuéstrese que

$$\kappa(P) = \lim_{Q \to P} \frac{2h(Q)}{d(Q)^2}\,.$$

Curvas especiales

24. Hélices generalizadas. Son las curvas espaciales que resultan de tomar una curva plana y levantarla por un múltiplo del arco. Concretamente, sea $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbf{p}$ un punto fijado; en el plano afín $\mathbf{p} + \mathbb{R}\mathbf{e}_1 + \mathbb{R}\mathbf{e}_2$ tomamos una curva $\boldsymbol{\alpha}(t) = \mathbf{p} + x_0(t)\mathbf{e}_1 + y_0(t)\mathbf{e}_2$ y hacemos

$$(x, y, z) = \mathbf{p} + x_0(t)\mathbf{e}_1 + y_0(t)\mathbf{e}_2 + a\, s(t)\, \mathbf{e}_3 \ ,$$

siendo $s(t)$ el parámetro longitud de arco de $\boldsymbol{\alpha}(t)$ y a una constante. La recta $\mathbb{R}\mathbf{e}_3$ es el *eje de hélice* y el número a es el *paso* ("de rosca") de la misma.

- Para una curva regular $\boldsymbol{\gamma}$, demuestra que son equivalentes:
  - (i) $\boldsymbol{\gamma}$ es una hélice generalizada.
  - (ii) Las tangentes a $\boldsymbol{\gamma}$ forman un ángulo constante con una dirección fija.
  - (iii) Existen constantes c_1, c_2, c_3 tales que $c_1 x(t) + c_2 y(t) + c_3 z(t)$ es una función longitud de arco para $\boldsymbol{\gamma}$.
- Determina a partir de (c_1, c_2, c_3) el eje y el paso.

25. Demuestra que una curva birregular es una hélice generalizada si y sólo si la función $\dfrac{\tau(s)}{k(s)}$ es constante. Relaciona dicha constante con el paso.

26. Dada una función $q(t) > 0$ y dos constantes a, b, construimos la curva

$$(x, y, z) = \left(a \int_0^t \operatorname{sen}(q(u))du \ , \ a \int_0^t \cos(q(u))du \ , \ b\,t \right) \ .$$

- Demuestra que es una hélice generalizada.
- Halla su curvatura y su torsión.
- Halla una curva espacial parametrizada por longitud de arco $s > 0$ que tenga $k = \dfrac{1}{s}$ y $\tau = \dfrac{4}{s}$. Haz un dibujo de la misma.

27. Evolutas: Al lugar geométrico de los centros de curvatura de una curva plana se le llama su evoluta. Parametrizamos la evoluta de $\boldsymbol{\gamma}(t)$ por: $\boldsymbol{\beta}(t) =$ centro de curvatura de $\boldsymbol{\gamma}$ en t.

- Halla la evoluta de la parábola $\boldsymbol{\gamma}(t) = (t, \frac{1}{2}t^2)$, $t \in \mathbb{R}$, y dibuja juntas la curva y su evoluta.
- Dada la cicloide $\boldsymbol{\gamma}(t) = \frac{1}{4} \cdot (t - \operatorname{sen} t \ , \ 1 - \cos t)$, $t \in \mathbb{R}$, comprueba que la evoluta de $\boldsymbol{\gamma}$ es una trasladada de $\boldsymbol{\gamma}$. (La cicloide también es notable por ser braquistocrona y tautocrona).
- Dada una curva regular $\boldsymbol{\gamma}(t)$, con curvatura $k(t)$, demuestra que $\rho(t) = \dfrac{1}{k(t)}$ es una función longitud de arco para la evoluta de $\boldsymbol{\gamma}$.
- Si la evoluta $\boldsymbol{\beta}$ es regular, prueba que para cada $t \in I$ la recta tangente a $\boldsymbol{\beta}$ en $\boldsymbol{\beta}(t)$ coincide con la recta normal a $\boldsymbol{\gamma}$ en $\boldsymbol{\gamma}(t)$. Da condiciones en $\boldsymbol{\gamma}$ para que $\boldsymbol{\beta}$ sea una curva regular.

28. Involutas: las involutas de una curva $\boldsymbol{\beta}$ son las curvas que tienen a $\boldsymbol{\beta}$ por evoluta.

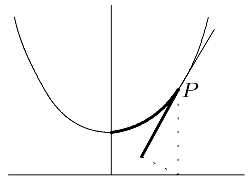
- Demuestra que si $s(t)$ es un parámetro longitud de arco de $\boldsymbol{\beta}$ y si c es una constante entonces $\boldsymbol{\gamma}(t) = \boldsymbol{\beta}(t) - (\, s(t) + c\,)\, \mathbf{t}_{\boldsymbol{\beta}}(t)$ es una involuta de $\boldsymbol{\beta}$.
- Halla una involuta de la circunferencia: $\boldsymbol{\beta}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, $t \in \mathbb{R}$, y dibújala.

29. Tractriz: es la curva que describe un esquiador acuático cuando la lancha remolcadora sigue una línea recta, y la fricción del agua es tan importante que en vez de la ley de Newton (fuerza = masa·aceleración) se cumple la "ley"de Aristóteles (fuerza = contante·velocidad).

- Supongamos que la lancha se mueve por el eje positivo Oy, que la cuerda de arrastre tiene longitud 1 y que el esquiador parte del punto $(1,0)$. Sea $\boldsymbol{\gamma}(s) = (x(s), y(s))$, con $x(0) = 1$, una curva parametrizada por longitud de arco cuya traza es la trayectoria del esquiador. Halla $\boldsymbol{\gamma}(s)$. (**Nota:** puedes dejar $y(s)$ expresada como una integral).
- Para $0 < r < \pi$ se define $\eta(r) = (\operatorname{sen} r\,,\ \cos r + \log\tan\frac{r}{2}\,)$.
  - Comprueba que η es regular excepto en $r = \frac{\pi}{2}$.
  - Dado el nuevo parámetro r tal que: $e^{-s(r)} = \operatorname{sen} r$, $\frac{\pi}{2} < r < \pi$, comprueba que $\eta(r) = \boldsymbol{\gamma}(s(r))$. Dibuja η (y, al mismo tiempo, $\boldsymbol{\gamma}$).

30. Catenaria. Parametrícense, por longitud de arco, las curvas dadas por $y = a\cosh(x/a)$, $a > 0$.

Sea $a = 1$. Verifíquese que si un punto P está sobre la catenaria, entonces la longitud de la proyección sobre la tangente a la curva en P del segmento vertical desde P al eje OX (véase el dibujo) es igual a la longitud de arco desde el punto $(0,1)$ de la catenaria al punto P. Demuéstrese que esta propiedad caracteriza a la catenaria (con $a = 1$).



31. Curvas esféricas. Sea $\boldsymbol{\gamma}$ una curva regular parametrizada por longitud de arco y con $\tau \neq 0$.

a) Si $\boldsymbol{\gamma}$ está contenida en la esfera de centro $\mathbf{p}$ y radio r, entonces

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{p} - \frac{1}{\kappa}\mathbf{n} + \left(\frac{1}{\kappa}\right)'\frac{1}{\tau}\mathbf{b}\,,$$

y, en particular,

$$(\star) \qquad \left(\frac{1}{\kappa}\right)^2 + \left(\left(\frac{1}{\kappa}\right)'\frac{1}{\tau}\right)^2 = r^2$$

b) Recíprocamente, pruébese que si $(\star)$ se satisface y $\kappa' \neq 0$,entonces $\boldsymbol{\gamma}$ está contenida en una esfera.