Matemática Discreta
Segundo curso, grado en Matemáticas, UAM, 2011-2012

Hoja 1

1. En una reunión con n personas, calcula la probabilidad de que haya

- alguna con fecha de cumpleaños en una cierta semana (la quinta, por ejemplo);
- al menos dos que cumplan años en la misma semana;
- exactamente una doble coincidencia (dos personas cumplen años en la misma semana; y el resto en semanas distintas);
- exactamente una triple coincidencia (tres personas cumplen años en la misma semana; y el resto en semanas distintas).

2. Para publicar las notas de un grupo de 50 alumnos de cierta asignatura, se identificará a cada persona con las k últimas cifras de su DNI. Aquí, k podría valer, 1, 2, etc. ¿Qué valor de k garantiza que, con una certidumbre del 95 %, no haya dos repetidos?

3. En una caja tenemos bolas rojas, azules, etc. Las hay de n colores distintos, y tantas de cada color como necesitemos. ¿Cuántos collares distintos —de longitud en principio arbitraria— podremos fabricar si exigimos que las cuentas del collar sean de colores distintos?

4. Vamos a fabricar tarjetas de identificación poniendo símbolos en las casillas de una matriz 3×3. En las filas pueden repetirse los símbolos, pero los tres de cada columna han de ser distintos. ¿Cuántos símbolos son necesarios si queremos que haya al menos 10^9 tarjetas distintas? (*Indicación*: hágase la cuenta por columnas).

5. Hállense los cardinales de los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned} X &= \{(A,B) : A, B \subset \{1,\dots,n\},\ A \cap B = \emptyset\} \\ Y &= \{(A,B) : A, B \subset \{1,\dots,n\},\ A \subset B\} \\ Z &= \{(A,B) : A, B \subset \{1,\dots,n\},\ A \subsetneq B\} \end{aligned}$$

6. Una rana saltarina está situada en la casilla inferior izquierda de un tablero de ajedrez de 8×8, con la intención de llegar a la casilla opuesta en cuatro saltos, avanzando en cada uno de ellos hacia arriba y hacia la derecha. ¿De cuántas maneras lo puede hacer?

7. (a) Queremos ordenar las 27 letras del alfabeto de forma que a y b no aparezcan consecutivamente. ¿De cuántas maneras distintas se podrá hacer?
(b) ¿Y si además a y c no pueden aparecer consecutivamente?

8. Tenemos un conjunto $\mathcal{X}$ y unos subconjuntos suyos $A_1, \dots, A_k$. Pruébense, *por inducción*:

$$(a) \quad |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k| \ \le \ \min_{j=1,\dots,k} |A_j|;$$

$$(b) \quad |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k| \ \ge \ \sum_{j=1}^{k} |A_j| - (k-1)|\mathcal{X}|\,.$$

$$(c) \quad |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k| \ \le \ \sum_{j=1}^{k} |A_j|$$

$$(d) \quad |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k| \ \ge \ \sum_{j=1}^{k} |A_j| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j|\,.$$

9. ¿Cuántos números naturales menores que 60000 son primos con 30?

10. Un acertijo (algo truculento) debido a Lewis Carroll: en una batalla entre 100 combatientes, 80 perdieron un brazo, 85 una pierna, 70 un ojo, y 75 una oreja. Un número x de ellos perdió las cuatro cosas. Demuéstrese que $10 \le x \le 70$. ¿Se pueden mejorar estas estimaciones?

11. Pruébese que, si k es un cierto número fijo, entonces

$$\binom{n-1}{k-1}, \quad \binom{n+k-1}{k-1}, \quad \binom{n+\binom{k}{2}-1}{k-1} \sim \frac{n^{k-1}}{(k-1)!} \qquad \text{cuando} \quad n \to \infty.$$

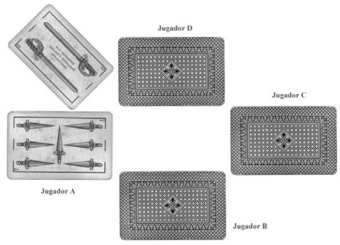
12. Para su uso en este ejercicio, describimos brevemente la baraja española: consta de 40 cartas, que están agrupadas en cuatro palos (oros, copas, espadas y bastos). Cada palo cuenta con diez cartas: as, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, sota, caballo y rey.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que en un mazo "bien barajado" de cartas las dos primeros cartas no formen pareja (no sean, por ejemplo, dos ases, o dos sotas, o dos. . .)?

(b) ¿En cuántas "manos" distintas de 5 cartas de baraja española aparecen los 4 palos? (Nota: consideremos que una mano de 5 cartas es un subconjunto de 5 cartas).

(c) ¿Cuántas manos de cinco cartas de la baraja española son exactamente un trío (por ejemplo, tres sotas y las otras dos cartas que no sean sotas y que, además, sean distintas entre sí)? ¿Y exactamente dobles parejas?

(d) Estamos jugando a la pocha y tenemos la siguiente partida: sobre el mazo de cartas está el 2 de espadas (espadas es, por tanto, la "pinta"). El jugador A, que es mano (esto es, el primero en jugar), tiene un 7 de espadas. Lo único que nos interesa saber es que, con las reglas del juego, sólo hay en la baraja 5 cartas que superen el valor de su carta (sota, caballo, rey, tres y as de espadas). ¿Cuál es la probabilidad de que A pierda la jugada?



13. (a) Compruébese que el número de listas de longitud n con ceros y unos, en las que hay exactamente r unos, y sin unos consecutivos, es

$$\binom{n-r+1}{r}.$$

(b) ¿De cuántas formas distintas se puede extraer de $\{1, 2, \ldots, n\}$ un conjunto de r números, de forma que no haya dos consecutivos?

14. Sea $D_n(k)$ el número de permutaciones de $\{1, 2, \ldots, n\}$ que fijan exactamente k elementos. Así, $D_n(0)$ coincide con D_n, el número de desbarajustes de $\{1, 2, \ldots, n\}$. Pruébese que

$$D_n(k) = \binom{n}{k} D_{n-k},$$

donde conviene definir $D_0 = 1$. Dedúzcase que $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} D_j = n!$. Esto es, $\displaystyle\frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} D_j = 1$. La última expresión nos dice que, en media, una permutación fija un elemento.

15. Compruébese que

$$\max_{j=0,\ldots,2m} \left\{ \binom{2m}{j} \right\} = \binom{2m}{m}.$$

Obténgase y pruébese el resultado análogo para los coeficientes binómicos $\binom{n}{j}$ con n impar.

16. Pruébense, con argumentos combinatorios, las siguientes identidades:

a) $$\binom{2n}{n+1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k}\binom{n}{k+1}$$

b) $$\binom{2n}{n}^2 = \sum_{k=0}^{n} \frac{(2n)!}{(n-k)!^2\, k!^2}$$ (*Indicación*: cuenta el número de maneras de elegir dos subconjuntos de tamaño n de $\{1, \ldots, 2n\}$ no necesariamente disjuntos).

c) $$\binom{n+1}{k+1} = \sum_{j=0}^{n} \binom{j}{k}$$ (*Indicación*: clasifica los subconjuntos en función de su mayor elemento).