Conjuntos y Números
Primero de Matemáticas, Universidad Autónoma de Madrid
Curso 2002-2003

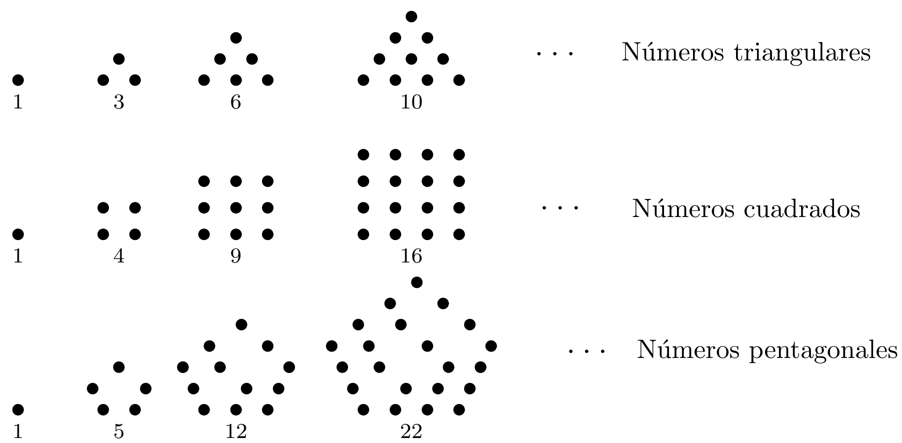
Hoja 1

Números

1. Usa el diccionario, si es preciso, para escribir la forma ordinal de los números siguientes: 239, 1973, 1973, 15631 y 8395.

2. Escribe los números (cardinales y ordinales) en diversas lenguas (inglés, francés, alemán, catalán, portugués,...).

3. Los Pitagóricos representaban a los números con piedras (cálculos) en la arena, de donde procede la palabra calcular:



Calcula el quinto número triangular, y el sexto, y el milésimo noningentésimo nonagésimo nono. Haz lo mismo para los pentagonales. ¿Cómo empezaría la sucesión de los números hexagonales?

Principio de Inducción Completa

4. Hallar una fórmula para la suma $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$ y demostrar su validez usando la inducción completa.

5. Demostrar la fórmula:

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}\,.$$

6. Demostrar la fórmula:

$$(1+q)(1+q^2)(1+q^4)\cdots(1+q^{2^n}) = \frac{1-q^{2^{n+1}}}{1-q}\,.$$

7. La sucesión de Fibonacci, $\{F_n\}$, está definida por medio de la ley de recurrencia:

$$F_1 = 1, \quad F_2 = 1, \qquad F_{n+2} = F_n + F_{n+1}, \quad \forall\, n > 0\,.$$

Calcular los diez primeros términos de la sucesión y demostrar la siguiente identidad:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right] .$$

Conjuntos

8. Demostrar que para todo conjunto X se tiene que $\emptyset \subset X$ y que $X \subset X$.

9. Demostrar que si $X \subset Y$ entonces $\mathcal{P}(X) \subset \mathcal{P}(Y)$.

10. Elabora la lista de todos los subconjuntos de $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

11. Demostrar por inducción que si un conjunto tiene exactamente n elementos, entonces tiene 2^n subconjuntos.

12. Demostrar que $\mathcal{P}(X \cap Y) = \mathcal{P}(X) \cap \mathcal{P}(Y)$.

13. Demostrar que $\mathcal{P}(X) \cup \mathcal{P}(Y) \subset \mathcal{P}(X \cup Y)$, y dar un ejemplo que muestre que, en general, ambos conjuntos son distintos.

14. Demostrar que $(Y \cap Z)^c = Y^c \cup Z^c$, y que $(Y \cup Z)^c = Y^c \cap Z^c$.

15. Demostrar la identidad:

$$(X \cup Y) \cap (Z \cup W) = (X \cap Z) \cup (X \cap W) \cup (Y \cap Z) \cup (Y \cap W)$$

16. ¿Cuántos elementos tiene el conjunto $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))))$?

Dibujar diagramas de Venn para ilustrar las relaciones siguientes:

17. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

18. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

19. $A \cup B = B \cup A$

20. $A \cap B = B \cap A$

21. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

22. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

23. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

24. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

25. $A \cup A^c = X$

26. $A \cap A^c = \emptyset$

27. $(A^c)^c = A$

El lenguaje de las Matemáticas

28. $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \iff \mathcal{B} \wedge \mathcal{A}$.

29. $\mathcal{A} \vee \mathcal{B} \iff \mathcal{B} \vee \mathcal{A}$.

30. $\neg\neg\mathcal{A} \iff \mathcal{A}$.

31. $\mathcal{A} \wedge (\mathcal{B} \wedge \mathcal{C}) \iff (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \wedge \mathcal{C}$.

32. $\mathcal{A} \vee (\mathcal{B} \vee \mathcal{C}) \iff (\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \vee \mathcal{C}$.

33. $\mathcal{A} \wedge (\mathcal{B} \vee \mathcal{C}) \iff (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \vee (\mathcal{A} \wedge \mathcal{C})$.

34. $\mathcal{A} \vee (\mathcal{B} \wedge \mathcal{C}) \iff (\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{A} \vee \mathcal{C})$.

35. $\neg(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \iff \neg\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B}$.

36. $\neg(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \iff \neg\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{B}$.

37. Demostrar que toda implicación, $\mathcal{A} \implies \mathcal{B}$, equivale a su contrarrecíproca, $\neg\mathcal{B} \implies \neg\mathcal{A}$.

Cuantificadores. Estudiar la verdad o falsedad de las proposiciones siguientes:

38. $\forall x \in \mathbb{R},\ 2x \geq x$, $\qquad \mathbb{R}$ = números reales.

39. $\forall x \in \mathbb{N},\ 3x \geq x$, $\qquad \mathbb{N}$ = números naturales.

40. $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 = 2$.

41. $\exists x \in \mathbb{Q},\ x^2 = 2$, $\qquad \mathbb{Q}$ = números racionales.

42. $\forall x,\ \exists!\, y,\ y = x^4$, $\qquad x, y \in \mathbb{R}$.

43. $\forall x \in \mathbb{R},\ x^3 + 7x^2 + 1 \geq 0$.