Matemática Discreta
Tercero de Matemáticas
Curso 2001-2002

Hoja 1

1. ¿Cuántos números distintos de tres dígitos diferentes se pueden formar usando las cifras $\{1, 2, \ldots, 9\}$? ¿Cuántos de estos son números pares? ¿Y cuántos son menores que 468?

2. ¿Cuántas palabras se pueden formar usando las 27 letras del abecedario de forma que las letras a y b no aparezcan consecutivamente? ¿Y si además a y c tampoco pueden aparecer consecutivamente?

3. ¿De cuantas formas se puede confeccionar una lista de 12 términos con las letras a, b y c de forma que aparezcan 2 a's, 2 b's y 8 c's, y además cada a y cada b tengan una c a ambos lados?

4. ¿Cuántos números naturales tienen en su expresión en base 10 todos sus dígitos distintos?

5. ¿Cuántos enteros entre 1 y 10000 tienen exactamente un 8 y un 9 en su expresión decimal?

6. Se forman todas las listas de longitud n con los números $\{1, \ldots, 6\}$. Probar que la suma de los números que aparecen en esas listas es par para la mitad de ellas.

7. Hallar el número de capicúas de k cifras. Demostrar que la suma de los inversos de los números capicúas es finita.

8. Tenemos $2n$ bolas rojas numeradas y otras $2n$ bolas blancas numeradas. ¿De cuántas formas distintas se pueden escoger, de entre esas $4n$ bolas, un conjunto con n bolas rojas y n blancas?

9. ¿De cuántas maneras distintas se puede distribuir un grupo de 40 personas en 8 grupos de 5 personas?

10. En una tienda hay k clases de postales diferentes. Queremos enviar postales a n amigos (una a cada uno). ¿De cuántas maneras diferentes podemos hacerlo? ¿De cuántas maneras, si queremos que todas las postales enviadas sean diferentes? ¿Y si queremos enviar dos postales diferentes a cada amigo?

11. Alicia invita a 7 amigos a su fiesta de cumpleaños. Cuando llegan, todos se dan la mano. ¿Cuántos saludos hay en la fiesta?

Después se sientan a cenar, con Alicia en la presidencia. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden sentar?

Después de cenar se disponen a jugar al *Trivial* en equipos de dos. ¿De cuántas maneras diferentes pueden quedar formados los equipos?

12. En la fiesta anterior se han aburrido de jugar al *Trivial* (siempre hay algún listo que se sabe las respuestas de memoria) y deciden intentar algo más lucrativo como las quinielas (14 partidos con tres resultados diferentes cada uno: 1, X, 2). ¿Cuántas columnas deben rellenar para acertar los 14 partidos?

Como les parece muy caro, deciden preguntar a un adivino, el cual les asegura que en la siguiente jornada no van a salir signos consecutivos. Si el adivino está en lo cierto, ¿cuántas columnas deben rellenar?

13. ¿En cuántas "manos" distintas de 5 cartas de la baraja española aparecen los cuatro palos?

14. Si n bolas numeradas se distribuyen al azar en n cajas numeradas, ¿cuál es la probabilidad de que ninguna caja quede vacía?; ¿y de que exactamente una caja quede vacía?

15. La longitud de una composición de un número natural n es el número de sumandos. Probar que si un número n tiene M composiciones de longitud k, entonces también tiene M composiciones de longitud $n-k+1$. Deducir que la longitud media de las composiciones del número n es $\frac{n+1}{2}$.

16. Se distribuyen n bolas idénticas en m cajas numeradas, ¿de cuántas formas distintas se puede hacer esto de manera que cada caja reciba al menos una bola y a lo sumo dos? ¿Y si la única restricción es que haya a lo sumo dos en cada caja?

17. ¿De cuántas maneras diferentes podemos distribuir 20 pesetas entre 12 chicos?

18. Consideramos el conjunto de símbolos $X = \{1, 2, 3, \ldots, 50\}$. Diremos que un subconjunto A de X está *separado* si la diferencia entre cualesquiera dos de sus elementos es al menos tres unidades. Por ejemplo, $\{10, 15, 17, 40\}$ no está separado, mientras que $\{10, 15, 18, 40\}$ sí lo está. ¿Cuántos subconjuntos separados distintos de *cinco* elementos se pueden formar con los elementos de X?

19. ¿Cuántas combinaciones diferentes pueden salir en la lotería primitiva teniendo en cuenta el número complementario? Si nos olvidamos del complementario, ¿cuál es la probabilidad de que entre los seis números obtenidos haya 3 pares y 3 impares?

20. Demostrar que la suma de los inversos de los números naturales que no tienen el dígito 0 es finita sea cual sea la base que consideremos.

21. ¿Cuántos números naturales menores que 60.000 son primos con 30?

22. Utilizar el principio de inclusión-exclusión para hallar una fórmula explícita para $\pi(x) - \pi(\sqrt{x})$, donde $\pi(x)$ es la función que cuenta el número de primos menores o iguales que x.

23. (Lewis Carroll) En una batalla entre 100 combatientes, 80 perdieron un brazo, 85 una pierna, 70 un ojo, y 75 una oreja. Un número indeterminado de ellos, x, perdió las cuatro cosas. Demostrar que $10 \leq x \leq 70$. ¿Es esto lo mejor que se puede decir sobre x?