Cálculo 1 — Curso 2010-2011

Primero curso, grado en Matemáticas (grupo 715)

Hoja 10: Series numéricas

1.- Demuestra que las series siguientes divergen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k+1}{k}\right)^k, \qquad \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k^{k-2}}{3^k}.$$

2.- Determina si las siguientes series convergen o divergen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^3+1}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\arctan k}{1+k^2}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^k}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2+\cos k}{\sqrt{k+1}}.$$

3.- Estudia la convergencia de las siguientes series:

(1) $\displaystyle\sum_k \frac{10^k}{k!}$ (2) $\displaystyle\sum_k \frac{1}{k\,2^k}$ (3) $\displaystyle\sum_k \frac{k!}{100^k}$

(4) $\displaystyle\sum_k \frac{(\ln k)^2}{k}$ (5) $1 + \frac{1\cdot 2}{1\cdot 3} + \frac{1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 3\cdot 5} + \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7} + \cdots$ (6) $\displaystyle\sum k\left(\frac{2}{3}\right)^k$

(7) $\displaystyle\sum_k \frac{1}{1+\sqrt{k}}$ (8) $\displaystyle\sum_k \frac{2\,k+\sqrt{k}}{k^3+2\sqrt{k}}$ (9) $\displaystyle\sum_k \frac{k!}{10^{4\,k}}$

(10) $\displaystyle\sum_k \frac{k^2}{e^k+1}$ (11) $\displaystyle\sum_k \frac{2^k\,k!}{k^k}$ (12) $\displaystyle\sum_k \frac{(k!)^2}{(2\,k)!}$

(13) $\displaystyle\sum_k \frac{45}{1+100^{-k}}$ (14) $\displaystyle\sum_k (\sqrt[k]{k}-1)^k$ (15) $\displaystyle\sum_k \frac{1}{2^{\ln k}}$

4.- Sea f una función creciente. Demuestra que

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(k) \le \int_1^n f(x)dx \le \sum_{k=2}^{n} f(k).$$

a) Aplica la fórmula anterior con $f(x) = \ln x$ para demostrar que

$$\frac{n^n}{e^{n-1}} < n! < \frac{(n+1)^{n+1}}{e^n} < \frac{(n+1)^{n+1}}{e^{n-1}}$$

b) Usa el apartado anterior para demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^{1/n}}{n} = \frac{1}{e}.$$

5.- Describe, según los valores de $a > 0$, la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n\,n!}{n^n}.$$

6.- Dos locomotoras se desplazan en línea recta, en sentido contrario, a 30 km/h partiendo de dos puntos a una distancia de 180 km. Una paloma sale de uno de los puntos a 60 km/h en dirección a la locomotora que viene en sentido opuesto. Cuando llega a la misma, gira y se dirige hacia la otra locomotora, y va repitiendo el proceso indefinidamente. ¿Cuántos kilómetros habrá recorrido hasta que las locomotoras se encuentren? ¿Cuántos en cada sentido?

7.- Calcula las siguientes sumas:

$$\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right), \qquad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{n\,(n+2)}, \qquad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{3\,n+1}{n\,(n+1)\,(n+2)}.$$

8.- Decide razonadamente si son ciertas las siguientes afirmaciones:

(a) Si $\lim a_n = 0$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\, a_n$ es convergente.

(b) Si para todo n, $a_n > 0$ y $\lim a_n = 0$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\, a_n$ es convergente.

(c) Si para todo n, $a_n \geq a_{n+1} > 0$ y $\lim a_n = 0$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty}(-2)^n\, a_n$ es convergente.

9.- Prueba que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\,\frac{(1+\frac{1}{n})^n}{n}$$

es convergente pero no absolutamente convergente.

10.- Estudia la convergencia absoluta y condicional de las siguientes series:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\,\frac{k^k}{3^k\,k!}, \qquad \sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\,\frac{1}{k\,\ln k}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}.$$