CÁLCULO 1 — Curso 2010-2011

PRIMER CURSO, GRADO EN MATEMÁTICAS

Hoja 1: Fundamentos

1.- Indicar todos los números reales x que satisfacen las siguientes condiciones:

(1) $|x+1| > 3$,

(2) $|2x+1| < 1$,

(3) $|x-1| \leq |x+1|$,

(4) $x^2 - 4x + 6 < x$,

(5) $|x^2 - 3| \leq 1$,

(6) $\frac{x^2}{x^2-4} < 0$,

(7) $\frac{x-1}{x+2} > 0$,

(8) $|(x-2)(x-3)| < 1$,

(9) $|x-1| + |x-2| > 1$,

(10) $\frac{|x+1|}{|x-1|} \geq 1$.

2.- Demostrar por inducción:

(1) $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

(2) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

(3) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1+2+\cdots+n)^2$.

(4) $1 + 3 + \cdots + (2n-1) = n^2$.

(5) $2^n \geq n^3$ para todo $n \geq 10$.

(6) $x^{2n} - y^{2n}$ es divisible por $x+y$.

(7) El número de rectas determinado por $n \geq 2$ puntos, de los cuales ningún trío pertenece a la misma recta, es $\frac{1}{2}n(n-1)$.

(8) $4(1 + 5 + 5^2 + \cdots + 5^n) + 1 = 5^{n+1}$.

3.- Sea $\mathcal{P}(n) = \{n^2 + 5n + 1 \text{ es un número par}\}$.
a) Demostrar que si $\mathcal{P}(n)$ es cierto, entonces $\mathcal{P}(n+1)$ también lo es.
b) Demostrar que $\mathcal{P}(n)$ es siempre falso.

4.- Demostrar que para todo número natural n y a y b cualesquiera se cumple que

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k},$$

donde

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad \text{y} \quad 0! = 1.$$

Indicación. Comprobar primero que $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$.

5.- Demostrar por inducción sobre n que

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1-x}, \quad \text{si } x \neq 1.$$

6.- Demostrar la desigualdad de Bernoulli

$$(1+x)^n \geq 1+nx, \quad \text{para } x \geq -1.$$

7.- Sean a, b dos números no negativos, con $a \leq b$. Demostrar que

$$a \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq b.$$

8.- Encontrar el supremo y el ínfimo de los siguientes conjuntos de números reales. ¿Son máximo o mínimo en algún caso?

(1) $A = \{x : x^2 < 4\}$,

(2) $B = \{x : x^2 \geq 4\}$,

(3) $C = \{x : 2 < x^2 \leq 4\}$,

(4) $D = \{\frac{n-1}{n} : n = 1, 2, 3, \ldots\}$,

(5) $E = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$,

(6) $F = E \cup \{0\}$,

(7) $G = \{\frac{1}{n} - (-1)^n : n \in \mathbb{N}\}$,

(8) $H = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0,\ x^2 \leq 3\}$.

9.- Si el conjunto A tiene supremo, ¿qué podemos decir sobre $-A = \{-x : x \in A\}$?

10.- Sean A y B dos subconjuntos no vacíos de números reales tales que $a < b$ para todo $a \in A$ y $b \in B$. Demostrar que existen $\sup A$, $\inf B$, y que además, $\sup A \leq \inf B$. Dar un ejemplo donde estos dos valores coincidan.

11.- Sean A y B dos subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$ acotados superiormente, y sea $A + B = \{a + b : a \in A,\ b \in B\}$. Demostrar que $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

Indicación. Para demostrar que $\sup A + \sup B \leq \sup(A+B)$ basta ver que $\sup A + \sup B \leq \sup(A + B) + \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$. Elegir a en A y b en B tales que $\sup A - a < \varepsilon/2$ y $\sup B - b < \varepsilon/2$.