Geometría II
Segundo de Matemáticas
Curso 2005-2006

Resumen/Hoja 0 de ejercicios sobre cálculo vectorial en $\mathbb{R}^3$

1. Producto escalar

Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ dos vectores de $\mathbb{R}^3$, cuyas coordenadas en la base canónica vienen dadas, respectivamente, por $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Definimos

el **producto escalar** de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_{j=1}^{3} u_j \, v_j \, .$$

la **norma** (al cuadrado) de $\mathbf{u}$:

$$\|\mathbf{u}\|^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \sum_{j=1}^{3} u_j^2 \, .$$

Podemos reescribir el producto escalar en términos de multiplicación matricial: si escribimos $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ como vectores columna,

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \qquad \text{entonces su producto escalar es} \qquad \mathbf{u}^t \mathbf{v} = (u_1, u_2, u_3) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 1 *Comprueba que se verifican las siguientes propiedades:*

a) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ *(simetría).*

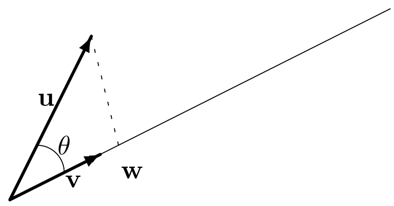
b) $(\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \alpha \, \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \beta \, \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ *(linealidad).*

c) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \|\mathbf{u}\|^2 \geq 0$ *(no negatividad)*
Además, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$ *si y sólo si* $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

• ***Proyección de un vector sobre una recta***

Ejercicio 2 *Dados* $\mathbf{u}$ *y* $\mathbf{v}$*, comprueba que el vector*

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} \left[\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} \right]$$



es el vector múltiplo de $\mathbf{v}$ *más cercano a* $\mathbf{u}$.

Deduce que

$$\cos(\theta) = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}; \qquad \textit{o bien} \qquad \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\| \, \cos(\theta), \quad \textit{con } \theta \in [0, \pi).$$

De lo que se obtiene que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ *si y sólo si* $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$ *(*$\mathbf{u}$ *y* $\mathbf{v}$ *son perpendiculares).*

Ejercicio 3 *Comprueba que*

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\| \qquad \textit{(desigualdad de Cauchy-Schwarz).}$$

Y que la igualdad $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| = \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\|$ *sólo se tiene si* $\mathbf{u}$ *es un múltiplo de* $\mathbf{v}$.

Interpreta geométricamente esta desigualdad.

- ***Aplicaciones y matrices ortogonales***

Una aplicación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es **ortogonal** si

$$T(\mathbf{u}) \cdot T(\mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \qquad \text{para todo } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3.$$

Es decir, si T conserva el producto escalar. Nótese que esto supone que se conservan ángulos entre vectores, y también las normas de los vectores.

Ejercicio 4 *Comprueba que, si A es la matriz que representa a la aplicación T (en las bases canónicas), entonces A es una* ***matriz ortogonal****. Es decir, $A^tA = I$; o también $A^{-1} = A^t$.*

Ejercicio 5 *Demuestra que las transformaciones lineales T de $\mathbb{R}^3$ de la forma $T = \lambda O$, donde $\lambda \in \mathbb{R}^3$, $\lambda \neq 0$ y O es ortogonal, conservan ángulos.*

Ejercicio 6 *Demuestra el recíproco del enunciado anterior.*

- ***Coordenadas de un vector en una base***

Sea $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ y sea $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ una base de $\mathbb{R}^3$.

Ejercicio 7 *Calcula las coordenadas de $\mathbf{u}$ en la base $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ si la base es a) ortonormal; b) ortogonal; c) arbitraria.*

Si (u_1, u_2, u_3) son las coordenadas de $\mathbf{u}$ en la base $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$, calcula $\|\mathbf{u}\|^2$.

Si (u_1, u_2, u_3) y (v_1, v_2, v_3) son, respectivamente, las coordenadas de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en la base $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$, calcula $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.

- ***Proyección de un vector sobre un plano***

Ejercicio 8 *Sea $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ y consideremos un plano determinado por dos vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$. Determina cuál es el vector del plano más cercano a $\mathbf{u}$, y obtén una expresión para la distancia de $\mathbf{u}$ al plano.*

2. Producto vectorial

Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ dos vectores de $\mathbb{R}^3$, cuyas coordenadas en la base canónica vienen dadas, respectivamente, por $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$. El **producto vectorial** $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ es el vector dado por

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} + \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \mathbf{k} \qquad = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

Nota. Una definición alternativa: $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ es el único vector tal que

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$$

Ejercicio 9 *Comprueba que se verifican las siguientes propiedades:*

a) $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$

b) $(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \alpha\,(\mathbf{u} \times \mathbf{w}) + \beta\,(\mathbf{v} \times \mathbf{w})$.

c) El vector $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ es perpendicular tanto a $\mathbf{u}$ como a $\mathbf{v}$.

d) $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$ *si y sólo si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son linealmente dependientes.*

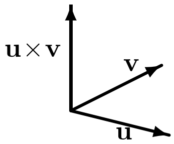
e)

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{z}) = \begin{vmatrix} \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} & \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{z} & \mathbf{v} \cdot \mathbf{z} \end{vmatrix}$$

f)
$$\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2 - (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})^2 \qquad \textit{o bien} \qquad \|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|\,|\sin(\theta)|\,.$$

(interpreta geométricamente la última identidad).

Regla: el vector $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ es perpendicular a $\mathbf{u}$ y a $\mathbf{v}$, su longitud es $\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|\,|\sin(\theta)|$ y su sentido viene dado por las reglas habituales (sacacorcho, mano derecha, etc.).



Ejercicio 10 *Demuestra que si M es una aplicación ortogonal, entonces, para todo $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^3$*
$$M(\mathbf{u})\times M(\mathbf{v}) = \varepsilon\, M(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) \qquad \textit{donde } \varepsilon = \pm 1.$$

3. Derivadas e integrales

En este apartado supondremos que (las componentes de) los vectores son funciones de un cierto parámetro t. Esto es, $\mathbf{u}=\mathbf{u}(t)$, $\mathbf{v}=\mathbf{v}(t)$, etc. Utilizaremos el símbolo $'$ para denotar la derivada $\frac{d}{dt}$:
$$\mathbf{u}'(t) = \lim_{h\to 0}\frac{\mathbf{u}(t+h)-\mathbf{u}(t)}{h}\,,$$
que, recordemos, es el vector en el que derivamos (de la manera habitual) componente a componente. Es decir, si $\mathbf{u}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, entonces
$$\mathbf{u}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))\,.$$

En las fórmulas que siguen no siempre se hacen explícitas las dependencias en el parámetro.

Ejercicio 11 *Comprueba que*

a) $(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})' = \mathbf{u}'\cdot\mathbf{v}+\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}'$.

b) Si $\|\mathbf{u}(t)\| = 1$ *para todo* t*, entonces* $\mathbf{u}'\cdot\mathbf{u} = 0$ *(esto es, los vectores* $\mathbf{u}$ *y* $\mathbf{u}'$ *son perpendiculares).*

c) $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})' = \mathbf{u}'\times\mathbf{v}+\mathbf{u}\times\mathbf{v}'$.

Dado $\mathbf{u}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, consideramos el vector
$$\mathbf{v} = \int_a^b \mathbf{u}(t)\,dt = \Big(\int_a^b x(t)\,dt, \int_a^b y(t)\,dt, \int_a^b z(t)\,dt\Big)$$

Ejercicio 12 *Demuestra que si $\mathbf{w}$ es un vector (fijo), entonces*
$$\Big(\int_a^b \mathbf{u}(t)\,dt\Big)\cdot\mathbf{w} = \int_a^b \big(\mathbf{u}(t)\cdot\mathbf{w}\big)\,dt$$

Ejercicio 13 *Demuestra que*
$$\Big\|\int_a^b \mathbf{u}(t)\,dt\Big\| \le \int_a^b \|\mathbf{u}(t)\|\,dt$$
Sugerencia: considera el vector $\mathbf{h}(t) = \mathbf{u}/\|\mathbf{u}\|$.