Geometría II
Segundo de Matemáticas
Curso 2004-2005

Fórmula de Gauss para la curvatura en el caso $E \equiv G \equiv 1$
(Ejercicio 6, apartado b) de la Hoja 4)

Tenemos una carta $\mathbb{X}(u, v)$ que parametriza una superficie S. De la parametrización sabemos que

$$E =< \mathbb{X}_u, \mathbb{X}_u >= 1 \qquad \text{y} \qquad G =< \mathbb{X}_v, \mathbb{X}_v >= 1\,.$$

Así que tanto $\mathbb{X}_u$ como $\mathbb{X}_v$ son unitarios (aunque no son necesariamente perpendiculares). Más adelante escribiremos el otro coeficiente de la primera forma fundamental, F, como

$$F =< \mathbb{X}_u, \mathbb{X}_v >= \cos\theta\,,$$

donde θ (que es una función del punto (u, v), claro) es el ángulo formado entre $\mathbb{X}_u$ y $\mathbb{X}_v$.

El objetivo es obtener una fórmula para la curvatura gaussiana, dada por

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \overset{E=G=1}{=} \frac{eg - f^2}{1 - F^2}\,,$$

en términos (únicamente) de los coeficientes de la primera forma fundamental (en este caso, sólo aparecerán F y sus derivadas, claro). En otras palabras, escribir la combinación $eg - f^2$ en términos de F y sus derivadas.

Recuérdese que

$$e = \mathbf{N} \cdot \mathbb{X}_{uu}\,, \qquad f = \mathbf{N} \cdot \mathbb{X}_{uv} \qquad \text{y} \qquad g = \mathbf{N} \cdot \mathbb{X}_{vv}\,.$$

Vamos a escribir los vectores $\mathbb{X}_{uu}$, $\mathbb{X}_{uv}$ y $\mathbb{X}_{vv}$ en la base[1] $\{\mathbb{X}_u, \mathbb{X}_v, \mathbf{N}\}$. Para ello, necesitaremos conocer los diversos productos escalares que aparecen en el siguiente cuadro:

$$E =< \mathbb{X}_u, \mathbb{X}_u >= 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} (1) & \mathbb{X}_{uu} \cdot \mathbb{X}_u = 0 \\ (2) & \mathbb{X}_{uv} \cdot \mathbb{X}_u = 0 \end{cases}$$

$$G =< \mathbb{X}_v, \mathbb{X}_v >= 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} (3) & \mathbb{X}_{uv} \cdot \mathbb{X}_v = 0 \\ (4) & \mathbb{X}_{vv} \cdot \mathbb{X}_v = 0 \end{cases}$$

$$F =< \mathbb{X}_u, \mathbb{X}_v > \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} \mathbb{X}_{uu} \cdot \mathbb{X}_v + \mathbb{X}_u \cdot \mathbb{X}_{uv} = F_u & \overset{(2)}{\Longrightarrow} \quad (5) \quad \mathbb{X}_{uu} \cdot \mathbb{X}_v = F_u \\ \mathbb{X}_{uv} \cdot \mathbb{X}_v + \mathbb{X}_u \cdot \mathbb{X}_{vv} = F_v & \overset{(3)}{\Longrightarrow} \quad (6) \quad \mathbb{X}_{vv} \cdot \mathbb{X}_u = F_v \end{cases}$$

Empezamos con el vector $\mathbb{X}_{uu}$, que se escribirá como

$$\mathbb{X}_{uu} = \alpha\,\mathbb{X}_u + \beta\,\mathbb{X}_v + \gamma\,\mathbf{N}\,, \quad \text{para ciertos } \alpha,\ \beta \text{ y } \gamma.$$

El coeficiente en $\mathbf{N}$ ya lo conocemos, es $\gamma = e$ (multiplíquese escalarmente la expresión por $\mathbf{N}$, recuérdese que el vector unitario $\mathbf{N}$ es perpendicular a $\mathbb{X}_u$ y a $\mathbb{X}_v$ y véase la definición de e más arriba). Los otros dos, α y β, los obtenemos multiplicando escalarmente por $\mathbb{X}_u$ y $\mathbb{X}_v$ la expresión anterior, utilizando las condiciones (1) y (5) y resolviendo el sistema de ecuaciones que aparece:

$$\left.\begin{array}{lcl} \text{al multiplicar por } \mathbb{X}_u & \longrightarrow & 0 = \alpha + \beta\,F \\ \text{al multiplicar por } \mathbb{X}_v & \longrightarrow & F_u = \alpha\,F + \beta \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad \alpha = -\frac{F\,F_u}{1 - F^2}\,, \quad \beta = \frac{F_u}{1 - F^2}\,.$$

El siguiente vector, $\mathbb{X}_{uv}$, es todavía más sencillo, porque es perpendicular a $\mathbb{X}_u$ y a $\mathbb{X}_v$ (véanse los productos escalares (2) y (3)):

$$\mathbb{X}_{uv} = f\,\mathbf{N}\,.$$

[1]¡Atención!, la base **no** tiene por qué ser ortonormal, pues $\mathbb{X}_u$ y $\mathbb{X}_v$ no son necesariamente perpendiculares. Pero sí es una base (los tres vectores son linealmente independientes) formada por vectores **unitarios**.

Por último, escribimos $\mathbb{X}_{vv}$ como (ya ponemos directamente g como coeficiente en $\mathbf{N}$)

$$\mathbb{X}_{vv} = \bar{\alpha}\,\mathbb{X}_u + \bar{\beta}\,\mathbb{X}_v + g\,\mathbf{N}$$

y procedemos como antes (ahora aplicamos las condiciones (6) y (4)):

$$\left.\begin{array}{lcl} \text{al multiplicar por } \mathbb{X}_u & \longrightarrow & F_v = \bar{\alpha} + \bar{\beta}\,F \\ \text{al multiplicar por } \mathbb{X}_v & \longrightarrow & 0 = \bar{\alpha}\,F + \bar{\beta} \end{array}\right\} \implies \bar{\alpha} = \frac{F_v}{1-F^2}\,, \quad \bar{\beta} = -\frac{F\,F_v}{1-F^2}\,.$$

Ya tenemos los tres vectores escritos en la base $\{\mathbb{X}_u, \mathbb{X}_v, \mathbf{N}\}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{X}_{uu} &= \left(-\frac{F\,F_u}{1-F^2}\right)\mathbb{X}_u + \left(\frac{F_u}{1-F^2}\right)\mathbb{X}_v + e\,\mathbf{N}\,; \\ \mathbb{X}_{uv} &= f\,\mathbf{N}\,; \\ \mathbb{X}_{vv} &= \left(\frac{F_v}{1-F^2}\right)\mathbb{X}_u + \left(-\frac{F\,F_v}{1-F^2}\right)\mathbb{X}_v + g\,\mathbf{N}\,. \end{aligned}$$

Vista esta estructura, para obtener la combinación $eg - f^2$, parece “razonable” calcular

$$\mathbb{X}_{uu}\cdot\mathbb{X}_{vv} - \mathbb{X}_{uv}\cdot\mathbb{X}_{uv}\,.$$

Tras unas pocas manipulaciones, descubrimos que

$$\mathbb{X}_{uu}\cdot\mathbb{X}_{vv} - \mathbb{X}_{uv}\cdot\mathbb{X}_{uv} = -\frac{F\,F_u\,F_v}{1-F^2} + (eg - f^2)\,.$$

Sin dejarnos vencer por el desánimo, intentamos escribir el lado izquierdo en términos de F y sus derivadas. El truco, la ocurrencia, consiste en derivar las condiciones (3) y (5):

$$\begin{array}{lcl} (3)\quad 0 = \mathbb{X}_{uv}\cdot\mathbb{X}_v & \implies & 0 = (\mathbb{X}_{uv}\cdot\mathbb{X}_v)_u = \mathbb{X}_{uuv}\cdot\mathbb{X}_v + \mathbb{X}_{uv}\cdot\mathbb{X}_{uv}\,, \\ (5)\ F_u = \mathbb{X}_{uu}\cdot\mathbb{X}_v & \implies & F_{uv} = (\mathbb{X}_{uu}\cdot\mathbb{X}_v)_v = \mathbb{X}_{uuv}\cdot\mathbb{X}_v + \mathbb{X}_{uu}\cdot\mathbb{X}_{vv}\,. \end{array}$$

Restando ambas ecuaciones, deducimos finalmente que

$$\mathbb{X}_{uu}\cdot\mathbb{X}_{vv} - \mathbb{X}_{uv}\cdot\mathbb{X}_{uv} = F_{uv}\,.$$

Por tanto,

$$eg - f^2 = F_{uv} + \frac{F\,F_u\,F_v}{1-F^2}\,,$$

con lo que nuestro objetivo está cumplido.

Pero si queremos escribirlo en términos más “elegantes”, ponemos, como anunciábamos al principio, $F = \cos(\theta)$. Calculamos entonces

$$1 - F^2 = \sin(\theta)^2\,, \quad F_u = -\sin(\theta)\,\theta_u\,, \quad F_v = -\sin(\theta)\,\theta_v\,, \quad F_{uv} = -\cos(\theta)\,\theta_u\,\theta_v - \sin(\theta)\,\theta_{uv}\,.$$

Con ellos, y tras un par de simplificaciones,

$$\boxed{K} = \frac{ef - g^2}{1-F^2} = \boxed{-\frac{\theta_{uv}}{\sin(\theta)}}$$