

Matemática Discreta
Segundo curso, Grado en Matemáticas, UAM
Curso 2011-2012

Examen ordinario, 19 de enero de 2012

Nombre y Apellidos

--	--	--	--	--	--

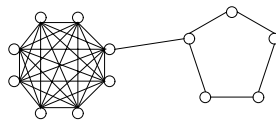
1. (2 puntos) Contesta brevemente, pero argumentando tus respuestas, a las siguientes cuestiones:

- a) ¿Cuántas aplicaciones $f : \{1, \dots, 100\} \rightarrow \{1, \dots, 50\}$ distintas se pueden formar si exigimos que el dominio de f conste de 30 elementos y que la imagen de f tenga 20 elementos?
- b) Queremos seleccionar tres subconjuntos (quizás vacíos), A , B y C , de $\{1, \dots, n\}$ de manera que sean disjuntos dos a dos. ¿De cuántas maneras distintas se podrá hacer?
- c) Se define el grafo G_n de la siguiente manera:
 - sus vértices son las n -listas con ceros y unos;
 - decimos que un vértice es par si la suma de los elementos de la lista que lo define es par; e impar en caso contrario;
 - dos vértices son vecinos si tienen la misma paridad.

¿Cuántas aristas tiene G_n ?

2. (2 puntos) Contesta brevemente, pero argumentando tus respuestas, a las siguientes cuestiones:

- a) ¿Cuántos árboles abarcadores distintos tiene el siguiente grafo (que consta de un K_8 y un C_5 unidos por una arista)?



(Nota: los vértices van numerados del 1 al 13).

- b) Llamamos $f(x)$ a la función generatriz de la sucesión $(a_n)_{n=0}^{\infty}$. Escribe, en términos de $f(x)$, la función generatriz de los números

$$b_n = \sum_{k=0}^n k a_k .$$

- c) La sucesión de números $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ viene dada por

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 1, \quad a_n - 2a_{n-1} + 3a_{n-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \quad \text{para cada } n \geq 2.$$

Halla su función generatriz.

- 3.** (2 puntos) Se forman listas con los números 1 y 3, sin restricción sobre la longitud. Para cada $n \geq 1$, llamamos $\mathcal{A}_n$ al conjunto de aquellas listas cuyos elementos suman exactamente n .

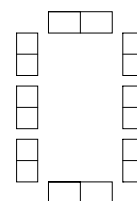
- Halla una ecuación de recurrencia para $a_n = |\mathcal{A}_n|$.
- ¿Cuál es la longitud máxima y la longitud mínima de las listas en $\mathcal{A}_n$?
- Sea b_n el número de listas como antes, pero con números 2 y 4. Halla b_{120} (Sugerencia: calcula, para empezar, los primeros términos de la sucesión b_n).

- 4.** (2 puntos) Tenemos siete urnas, numeradas del 1 a 7. Vamos a distribuir en ellas 50 bolas idénticas (podrían, en principio, quedar urnas vacías).

- Calcula el número de formas distintas de distribuirlas si las cuatro primeras (urnas de la 1 a la 4) reciben 30 bolas y las cuatro últimas (urnas de la 4 a la 7) reciben asimismo 30 bolas.
- Calcula el número de distribuciones distintas si, además de las condiciones anteriores, la primera y la última urnas reciben, entre las dos, exactamente 5 bolas.

- 5.** (2 puntos) Tenemos 8 fichas de dominó blancas (sin números), distribuidas como en el dibujo. Disponemos de los símbolos a , b , c y d . En cada parte de cada ficha hay que poner un símbolo. Los símbolos de las dos partes de una ficha han de ser necesariamente distintos.

Calcula el número de maneras distintas de asignar símbolos en los tres casos siguientes:



- los símbolos que aparecen en las partes vecinas de dos fichas consecutivas han de coincidir siempre;
- los símbolos que aparecen en las partes vecinas de dos fichas consecutivas han de ser distintos siempre;
- no hay restricciones adicionales.