Universidad Autónoma de Madrid
Facultad de Ciencias
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

NOTA

Cálculo I. Enero 2011

Primer Curso del Grado en Matemáticas y del Doble Grado Informática-Matemáticas

---

Apellidos.. Nombre.........................

D.N.I. .... Grupo ....

---

1) Consideramos la sucesión $\{a_n\}$, definida para $n \geq 2$ por:

$a_2 = (1 - \frac{1}{2^2})$, $\quad a_3 = (1 - \frac{1}{2^2})(1 - \frac{1}{3^2})$ y, en general, $a_n = (1 - \frac{1}{2^2})(1 - \frac{1}{3^2})(1 - \frac{1}{4^2}) \cdots (1 - \frac{1}{n^2})$

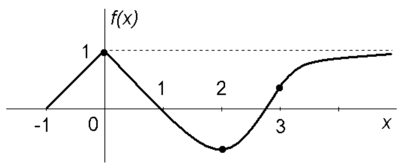
i) Demostrar por inducción que $a_n = \dfrac{n+1}{2n}$.

ii) Demostrar que la sucesión $\{a_n\}$ es monótona decreciente y acotada (superior e inferiormente).

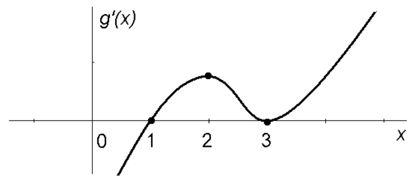
iii) Estudiar si el conjunto $A = \{a_2, a_3, a_4, \cdots, a_n, \cdots\}$ tiene supremo, ínfimo, máximo, mínimo.

---

2) i) Sabiendo que la gráfica de una función f es la que se representa a la derecha, se pide esbozar la gráfica de su derivada f'.



ii) Sabiendo que la gráfica de la derivada $g'(x)$ es la que se esboza a la derecha, se pide estudiar los intervalos de crecimiento-decrecimiento y concavidad-convexidad de la función original $g(x)$, explicando además qué sucede en los puntos $x = 1$, $x = 2$ y $x = 3$.



---

3) i) Estudiar la convergencia o divergencia de la integral impropia $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{t^2}\, dt$.

ii) Consideramos la función $F(x) = \displaystyle\int_0^{x} e^{t^2}\, dt$. Demostrar que existe algún punto $x_0 > 0$ tal que $F(x_0) = 1$.

iii) Demostrar que no puede haber más de un x_0 con la propiedad anterior.

---

4) i) Hallar los polinomios de Taylor de orden 6, alrededor de $x = 0$, para las funciones

$$f(x) = \cos x\,,\ g(x) = \ln(1 + x).$$

ii) Hallar el polinomio de Taylor de orden 4 alrededor de $x = 0$ para la función

$$h(x) = (\cos x) \cdot \ln(1 + x).$$

iii) Calcular $h'''(0)$.