

Geometría II
Segundo de Matemáticas UAM, curso 2005-2006
Examen septiembre, 12-9-2006

1. (3 puntos)

a) La función

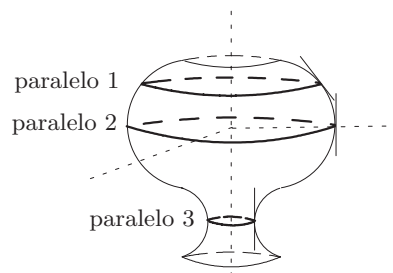
$$\gamma(t) = \left(t, \frac{t^2}{\sqrt{2}}, \frac{t^3}{3}\right) \quad \text{para } t \geq 0,$$

describe la posición de los puntos de una cuerda infinita. Decide en qué valor t_0 hay que cortar la cuerda para que, al extenderlo en el suelo, el tramo desde $t = 0$ hasta $t = t_0$ mida $14/3$.

b) En la esfera de radio 1, deseamos marcar un paralelo en el hemisferio norte de manera que el área del casquete que define este paralelo (en dirección al Polo Norte) sea la *cuarta* parte del área total de la esfera. ¿De qué paralelo se trata?

2. (3 puntos) Contesta brevemente a las siguientes cuestiones:

a) Considera la superficie de revolución con forma de botella invertida que se muestra en la figura de la derecha, sobre la que se han señalado tres paralelos. Supongamos que los tres paralelos están parametrizados por longitud de arco. Argumenta *geométricamente* por qué los paralelos 2 y 3 son geodésicas de la superficie, mientras que el paralelo 1 no lo es.



b) Considera la hélice parametrizada por

$$\gamma(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos s, \sin s, s),$$

con $s \in (0, 2\pi)$. En cada punto de la hélice está definido un vector tangente $\mathbf{t}_\gamma(s)$ (de tamaño 1). Considera a $\mathbf{t}_\gamma(s)$ como una curva cuya traza está sobre la esfera unidad. Dibújala.

c) Fijamos un punto $\mathbf{p}$ en una superficie S . Sea $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ la base de direcciones principales del plano tangente $T_{\mathbf{p}}S$. Llamemos $k(\theta)$ a la curvatura normal en la dirección que forma ángulo θ con $\mathbf{e}_1$ (hacia $\mathbf{e}_2$). Comprueba que, para todo ángulo θ ,

$$H = \frac{1}{2} \left[k(\theta) + k\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \right],$$

donde H es la curvatura media en $\mathbf{p}$.

d) Una superficie está parametrizada por $\mathbb{X}(u, v)$, con $u > 0$ y $v > 0$. Sabemos que

- $E(u, v)$ es, en realidad, una función únicamente del parámetro u ;
- $G(u, v)$ es sólo función de v ;
- $F(u, v) \equiv 0 \equiv f(u, v)$.

¿Deben las funciones $e(u, v)$ y $g(u, v)$ cumplir alguna condición especial?

3. (2 puntos) Consideramos una curva $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizada por longitud de arco. Consideramos la superficie S dada por la parametrización

$$\mathbb{X}(s, \lambda) = \gamma(s) + \lambda [\alpha \mathbf{b}_\gamma(s) + \beta \mathbf{n}_\gamma(s)] \quad \text{con } s \in (a, b) \text{ y } \lambda \in (-\varepsilon, \varepsilon)$$

y donde α y β son dos constantes.

(a) Calcula E , F y G en cada punto de la superficie.

(b) Estudia la dirección hacia la que apunta el vector normal en cada punto de la superficie y deduce condiciones sobre las constantes α y β para que la curva γ sea una geodésica de la superficie S .

4. (2 puntos) Viajamos en coche por el plano, partiendo del origen, siguiendo la traza de una curva $\gamma : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2$, parametrizada por longitud de arco (en kilómetros), que cumple que

- $\gamma(0) = (0, 0)$; $\gamma'(0) = (1, 0)$;
- su curvatura (con signo) es $\kappa(s) = \frac{1}{1+s^2}$ para cada $s \in [0, 1)$.

¿En qué punto del plano estaremos cuando el cuentakilómetros marque 1/2?

5. (1 punto extra) Consideremos la esfera unidad $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ y el cilindro $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$. Sea la aplicación

$$\varphi : S^2 \setminus \{0, 0, \pm 1\} \longrightarrow C$$

que a cada punto $\mathbf{p}$ de la esfera (sin los polos) le asocia $\varphi(\mathbf{p})$, el punto de corte con el cilindro C del rayo con origen en el eje OZ y perpendicular a OZ que pasa por $\mathbf{p}$.

Verifica que φ conserva áreas, pero no es isometría.

Notas y comentarios

- $\int \frac{1}{1+s^2} ds = \arctan(s).$
- $\int \frac{s}{1+s^2} ds = \frac{1}{2} \ln(1+s^2).$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1+s^2}} ds = \operatorname{arcsinh}(s).$
- $\int \frac{s}{\sqrt{1+s^2}} ds = \sqrt{1+s^2}.$