Geometría II
Segundo de Matemáticas UAM, curso 2004-2005
Examen de septiembre, 3-9-2005

1. (3 puntos) Contesta brevemente, pero razonando las respuestas, a las siguientes cuestiones:

(a) ¿Es el conjunto de puntos $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - zx + y^2 + 2z = 5\}$ una superficie regular?

(b) Sea S una superficie. Comprueba que en cada punto $\mathbf{p} \in S$ se cumple que $H(\mathbf{p})^2 \geq K(\mathbf{p})$ (H y K son la curvatura media y la gaussiana, respectivamente).

¿Es cierto que, para toda superficie S, $H(\mathbf{p})^2 \geq |K(\mathbf{p})|$ en cada $\mathbf{p} \in S$?

(c) Parametriza la superficie S dada por

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - z^2 = -1\,.$$

(d) ¿Existe una superficie regular parametrizada por $\mathbb{X}(u, v)$ con

$$E(u, v) = 2,\ G(u, v) = 5 \quad \text{y} \quad F(u, v) = 6 \quad ?$$

¿Y si la parametrización fuera $\mathbb{X}(u, v)$, con $u > 0$, $v \in (0, 2\pi)$ y los coeficientes de la primera y la segunda formas fundamentales fueran

$$E(u, v) = 1\,,\ F(u, v) = 0\,,\ G(u, v) = u \quad \text{y} \quad e(u, v) = u\,,\ f(u, v) = 0\,,\ g(u, v) = v \quad ?$$

(e) Consideremos la superficie (la *catenoide*) parametrizada de la siguiente manera:

$$\mathbb{X}(t, \theta) = (\cosh(t)\cos(\theta), \cosh(t)\sin(\theta), t)\,, \qquad t \in \mathbb{R}, \theta \in (0, 2\pi)\,.$$

Dibuja la superficie e interpreta geométricamente los parámetros t y θ. Cuando recorremos la curva sobre la catenoide dada por $\theta = \pi/2$, los vectores normales a la superficie describen un arco sobre la esfera unidad. ¿Cuál? Dibújalo.

2. (1 punto) (a) Sea $\mathbf{p}$ un punto de una superficie S. ¿Qué sabrías decir sobre $\mathbf{p}$ si

- una de las direcciones principales en $\mathbf{p}$ es también asintótica?
- ¿Y si las dos direcciones principales en $\mathbf{p}$ son asintóticas?

(b) Supongamos ahora que $\mathbf{p}$ es un punto hiperbólico. Compruébese que existe una dirección en la que la curvatura normal coincide con la curvatura media de la superficie S en $\mathbf{p}$.

3. (2 puntos) Viajamos por el plano, partiendo del origen, siguiendo la traza de una curva $\boldsymbol{\gamma}:[0,1)\to\mathbb{R}^2$, parametrizada por longitud de arco, que cumple que

- $\boldsymbol{\gamma}(0)=(0,0)$;
- $\boldsymbol{\gamma}'(0)=(0,1)$;
- su curvatura (con signo) es $\kappa(s)=\dfrac{1}{1+s^2}$ para cada $s\in[0,1)$.

¿En qué punto del plano estaremos cuando $s=1/2$?

4. (2 puntos) De nuevo estamos con la catenoide, que parametrizamos mediante

$$\mathbb{X}(t,\theta)=(\cosh(t)\cos(\theta),\cosh(t)\sin(\theta),t)\,,\qquad \text{con } t\in\mathbb{R} \text{ y } \theta\in(0,2\pi).$$

a) Dibuja y halla la longitud de la curva $\boldsymbol{\alpha}$ sobre el catenoide que, en coordenadas, viene dada por $t=\theta$, donde $0<\theta<\pi/2$.

b) Dibuja y halla el área de la porción de catenoide comprendida entre la curva $\boldsymbol{\alpha}$, el meridiano $\theta=\pi/2$ y el paralelo $t=0$.

5. (2 puntos) Sea S una superficie regular en $\mathbb{R}^3$ y $\boldsymbol{\gamma}(s)$ una curva birregular sobre la superficie, parametrizada por longitud de arco. Llamemos $\mathbf{N}(s)$ al vector normal a la superficie en el punto $\boldsymbol{\gamma}(s)$ (esto es, $\mathbf{N}(s)=\mathbf{N}(\boldsymbol{\gamma}(s))$).

Consideremos ahora la superficie $S_{\boldsymbol{\gamma}}$ parametrizada de la siguiente manera:

$$\mathbb{X}(s,\lambda)=\boldsymbol{\gamma}(s)+\lambda\,\mathbf{N}(s)\,.$$

Calcula la curvatura gaussiana en cada punto de $S_{\boldsymbol{\gamma}}$. ¿Es posible que $S_{\boldsymbol{\gamma}}$ tenga curvatura gaussiana nula en todos sus puntos?

Notas y comentarios:

- $\cosh(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$; $\quad\sinh(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$; $\quad\cosh(x)^2-\sinh(x)^2=1$;
- $\cos(x+\frac{\pi}{2})=-\sin(x)$; $\quad\sin(x+\frac{\pi}{2})=\cos(x)$;
- $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx=\operatorname{arcsin}(x)+C$;
- $\displaystyle\int\frac{1}{1+x^2}\,dx=\arctan(x)+C$;
- $\displaystyle\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx=\sqrt{1+x^2}+C$.
- $\displaystyle\int\cosh(x)^2\,dx=\frac{1}{2}\cosh(x)\sinh(x)+\frac{x}{2}+C$; $\quad\displaystyle\int\sinh(x)^2\,dx=\frac{1}{2}\cosh(x)\sinh(x)-\frac{x}{2}+C$.
- $\displaystyle\int x\cosh(x)^2\,dx=\frac{x}{2}\cosh(x)\sinh(x)+\frac{x^2}{4}-\frac{\cosh(x)^2}{4}+C$.
- $\displaystyle\int x\sinh(x)^2\,dx=\frac{x}{2}\cosh(x)\sinh(x)-\frac{x^2}{4}-\frac{\cosh(x)^2}{4}+C$.