Geometría II
Segundo de Matemáticas UAM, curso 2004-2005
Examen parcial (grupo de tarde), 17-3-2005

1. Escribe las condiciones que ha de cumplir un punto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ para que pertenezca al plano normal de la curva $\boldsymbol{\gamma}(t) = (\cos(t), \sin(t), e^{t/\pi})$, $t \in \mathbb{R}$, en el punto $\boldsymbol{\gamma}(\pi/2)$.

2. ¿Es posible en una curva birregular del espacio todas las rectas binormales concurran en un punto? Si es posible, ¿qué tipo de curva será?

3. Viajamos por el plano partiendo del origen $(0, 0)$. Y lo hacemos siguiendo la traza de la curva $\boldsymbol{\gamma} : [0, 1) \to \mathbb{R}^2$ (parametrizada por longitud de arco) que cumple que

- $\boldsymbol{\gamma}(0) = (0, 0)$;
- $\boldsymbol{\gamma}'(0) = (1, 0)$;
- su curvatura es $\kappa(s) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - s^2}}$ para cada $s \in [0, 1)$.

Tras recorrer una unidad de longitud (digamos metros), abandonamos la curva para seguir la dirección de la tangente a la curva en el punto de escape. Recorremos así otros 3 metros. ¿A qué distancia (en metros) del punto original $(0, 0)$ nos encontraremos?

Notas y comentarios:

- $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx = \arcsin(x)$.
- $\displaystyle\int \sqrt{1 - x^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{2}\arcsin(x)$.
- El plano normal es el generado por el vector normal y el vector binormal.

Geometría II
Segundo de Matemáticas UAM, curso 2004-2005
Examen parcial (grupo de mañana), 17-3-2005

1. Escribe las condiciones que ha de cumplir un punto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ para que pertenezca al plano osculador de la curva $\boldsymbol{\gamma}(t) = (\cosh(t), \sinh(t), t)$, $t \in \mathbb{R}$, en el punto $\boldsymbol{\gamma}(0) = (1, 0, 0)$.

2. ¿Qué funciones diferenciables $f(t)$ hacen que $\boldsymbol{\gamma}(t) = (\cosh(t), \sinh(t), f(t))$, para $t \in \mathbb{R}$, sea una curva plana?

3. Viajamos por el plano, partiendo del origen $(0, 0)$, siguiendo la traza de la curva $\boldsymbol{\gamma}(t) = (t, t^2)$, donde el parámetro $t \geq 0$ es el tiempo (en segundos). Tras dos segundos, cambiamos la trayectoria y nos vamos por la circunferencia tangente ("por dentro") a $\boldsymbol{\gamma}(2)$ y que tiene radio $1/\kappa_{\boldsymbol{\gamma}}(2)$. Recorremos (en sentido horario) media circunferencia. ¿En qué punto del plano nos encontraremos? ¿Y si sólo recorremos un cuarto de circunferencia?

Notas y comentarios:

- $\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 = 1$;
- $\cosh(x)^2 + \sinh(x)^2 = 2\cosh(x)^2 - 1 = 1 + 2\sinh(x)^2$.
- El plano osculador está determinado por el vector tangente y el normal.