

Geometría II
Segundo de Matemáticas UAM, curso 2005-2006
Examen parcial (grupo de mañana), 6-4-2006

1. (4 puntos) Queremos comparar el área de dos regiones sobre la superficie terrestre (que suponemos que es una esfera de radio R):

- la región 1 está comprendida entre el meridiano 0° , el meridiano 45° y el paralelo de colatitud 45° .
- la región 2 es el casquete polar (del hemisferio norte) de altura h .

Hállese el valor de h que hace que ambas regiones tengan la misma área.

2. Ahora estamos con una esfera de radio 1. Queremos ir del punto A (el Polo Norte, colatitud $\varphi = 0$) al punto B (longitud $\theta = \pi/2$, colatitud $\varphi = \pi/2$) por una trayectoria α en la que, en cada punto de la misma, la longitud θ coincida con la colatitud φ .

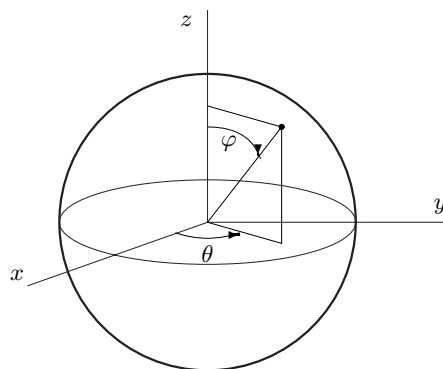
- (a) (3 puntos) Dibuja esa trayectoria en la esfera y calcula su longitud (puedes dejarla en forma de integral).
- (b) (1 punto extra) A la vista de la expresión obtenida, argumenta por qué el camino de A a B a lo largo del meridiano es más corto que la trayectoria α .
- (c) (3 puntos) ¿Qué ángulo forma la trayectoria α con el meridiano en el punto

$$\mathbf{p} = \mathbb{X}\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad ?$$

Notas y comentarios

Parametrización de la esfera de radio 1 en términos de los ángulos de longitud θ y colatitud φ :

$$\mathbb{X}(\theta, \varphi) = (\cos \theta \sin \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \varphi)$$



Geometría II
Segundo de Matemáticas UAM, curso 2005-2006
Examen parcial (grupo de tarde), 6-4-2006

1. Queremos construir una rampa helicoidal con las siguientes características:

- el suelo es de madera;
- el radio interior es de 1 metro;
- el radio exterior, de 3 metros;
- en cada vuelta completa se suben 4π metros;
- en total, se describen 8 vueltas completas.

(a) (1 punto) Parametriza dicha rampa.

(b) (3 puntos) ¿Cuántos metros cuadrados de madera necesitaremos para construirla? (puedes dejarlo en forma de una integral).

(c) (1 punto extra) Comprueba que con 1000 m^2 de madera tendremos suficiente.

(d) (3 puntos) Queremos pintar con una línea continua los dos bordes de la rampa, el interior y el exterior, con pintura amarilla. Cada bote de pintura permite pintar 100 metros de línea continua. ¿Cuántos botes de pintura necesitaremos?

2. (3 puntos) Estamos ahora con el helicoide parametrizado por

$$\mathbb{X}(u, \theta) = (u \cos(\theta), u \sin(\theta), \theta) \quad \text{con } u > 0 \text{ y } \theta \in \mathbb{R}.$$

En cada punto de la superficie, ¿cuánto de inclinado está el vector normal (a la superficie) con respecto a la vertical?

Notas y comentarios

Parametrización del helicoide de paso 2π en términos del ángulo θ y la distancia u al eje z :

$$\mathbb{X}(u, \theta) = (u \cos \theta, u \sin \theta, \theta)$$

