Geometría II
Segundo de Matemáticas UAM, curso 2004-2005
Examen de junio, 6-6-2005

1. (3 puntos) Contesta brevemente, pero razonando las respuestas, a las siguientes cuestiones:

(a) Consideremos dos superficies S y $\bar{S}$. Hemos encontrado una aplicación $f : S \to \bar{S}$ que es una isometría. ¿Es cierto que, para cada punto $\mathbf{p} \in S$, la curvatura media $H_S(\mathbf{p})$ coincide con la curvatura media $H_{\bar{S}}(f(\mathbf{p}))$?

(b) Consideramos la curva $z = 1/y$, con $y > 0$. Dibuja y parametriza la superficie que se obtiene al situar esta curva en el plano YZ y rotarla en torno al eje Y.

(c) Considera la superficie de revolución parametrizada de la siguiente manera: $\mathbb{X}(u, v) = (g(u)\cos(v), g(u)\sin(v), u)$, para $u \in (-1, 5)$ y $v \in (0, 2\pi)$. De la función $g(u)$ sabemos que tiene un máximo local en $u = 3$ y que $g(3) = 2$.

El punto $\mathbf{p} = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 3)$ pertenece a la superficie. ¿Tienes información suficiente como para decidir si es un punto elíptico, hiperbólico, parabólico o plano?

(d) Sea $\boldsymbol{\gamma}(s)$ una curva birregular parametrizada por longitud de arco cuya traza está contenida en una superficie S. Supongamos que $\boldsymbol{\gamma}$ es una geodésica en S. ¿Cuál es la relación entre el plano tangente $T_{\boldsymbol{\gamma}(s)}S$ y el plano osculador de la curva $\boldsymbol{\gamma}$ en el punto $\boldsymbol{\gamma}(s)$?

(e) Cuando se recorre la curva plana $y = 1/x$, con $x > 0$, los vectores tangentes recorren un arco de la circunferencia unidad. ¿Cuál? Dibújalo.

2. (2 puntos) Sea $\boldsymbol{\gamma} : I \to \mathbb{R}^3$ una curva birregular parametrizada por longitud de arco. Sea $\{\mathbf{t}_{\boldsymbol{\gamma}}(s), \mathbf{n}_{\boldsymbol{\gamma}}(s), \mathbf{b}_{\boldsymbol{\gamma}}(s)\}$ su triedro de Frenet en s y nombremos como $\kappa_{\boldsymbol{\gamma}}(s)$ y $\tau_{\boldsymbol{\gamma}}(s)$ a su curvatura y torsión en s.

Definimos, a partir de $\boldsymbol{\gamma}$, la curva $\boldsymbol{\alpha}$ dada por

$$\boldsymbol{\alpha}(s) = \boldsymbol{\gamma}(s) + \mathbf{b}_{\boldsymbol{\gamma}}(s)\,, \qquad \text{para cada } s \in I$$

a) Observa que s no tiene por qué ser necesariamente parámetro longitud de arco para la curva $\boldsymbol{\alpha}$. ¿Qué condiciones serían necesarias para que lo fuera?

b) Supongamos que $\boldsymbol{\gamma}$ tiene curvatura y torsión constantes. Esto es, $\kappa_{\boldsymbol{\gamma}}(s) = \kappa$ y $\tau_{\boldsymbol{\gamma}}(s) = \tau$ para todo $s \in I$. ¿Cuál es la curvatura $\kappa_{\boldsymbol{\alpha}}(s)$ de la curva $\boldsymbol{\alpha}$ en cada $s \in I$? ¿Qué ocurre si la curva $\boldsymbol{\gamma}$ es plana?

3. (2 puntos) Sea $\boldsymbol{\gamma} : I \to \mathbb{R}^3$ una curva birregular parametrizada por longitud de arco. Sean, como antes, $\{\mathbf{t}_{\boldsymbol{\gamma}}(s), \mathbf{n}_{\boldsymbol{\gamma}}(s), \mathbf{b}_{\boldsymbol{\gamma}}(s)\}$ el triedro de Frenet y $\kappa_{\boldsymbol{\gamma}}(s)$ y $\tau_{\boldsymbol{\gamma}}(s)$ la curvatura y la torsión.

Definimos, a partir de $\boldsymbol{\gamma}$, la *superficie* $S_{\boldsymbol{\gamma}}$ parametrizada por

$$\mathbb{X}(s, \lambda) = \boldsymbol{\gamma}(s) + \lambda\, \mathbf{n}_{\boldsymbol{\gamma}}(s)\,, \qquad \text{para } s \in I \text{ y } \lambda \in I'.$$

Calcula la curvatura gaussiana en cada punto de $S_{\boldsymbol{\gamma}}$. ¿Es posible conseguir que $S_{\boldsymbol{\gamma}}$ tenga curvatura gaussiana nula en todos sus puntos?

4. (2 puntos) Consideremos la superficie de un cono, que parametrizamos mediante

$$\mathbb{X}(u,\theta) = (u\cos\theta, u\sin\theta, u)\,, \qquad \text{con } u > 0 \text{ y } \theta \in (0, 2\pi).$$

a) Halla el área de la banda que incluye los puntos del cono con coordenada u entre 3 y 4.

b) Halla la longitud de la curva del cono que, en coordenadas, viene dada por $u = \theta$, y que une los puntos $\mathbf{p} = (\pi\sqrt{2}/8, \pi\sqrt{2}/8, \pi/4)$ y $\mathbf{q} = (0, \pi/2, \pi/2)$.

5. (1 punto)

a) La superficie S está parametrizada por una cierta $\mathbb{X}(u,v)$ de la que sabemos que $E = 1$, que $F \equiv 0$ y que $G \equiv G(u)$ (es decir, G es una función únicamente de u). Comprueba que si

$$\left[\frac{d}{du}\sqrt{G(u)}\right]^2 < 1\,,$$

entonces S es isométrica a una superficie de revolución.

b) Y si fuera $F \equiv 0$, $E = E(u)$ y $G = G(u)$, ¿qué condición general sobre $E(u)$ y $G(u)$ te permitiría concluir que S es isométrica a una superficie de revolución?